# CAPÍTULO 8
# TUTORIAL

## 1. AJUSTE LINEAL

### 1.1. Consideraciones previas

Aquí se muestra un ejemplo de como utilizar paso a paso el **Solver** del **Microsoft Excel®** para encontrar la función lineal que mejor se ajusta a una serie de datos con dos variables independientes **(esto es, la llamada "regresión múltiple" que, en nuestro caso, es triple)**. Ha sido extraído del anterior capítulo 6 de este mismo libro, a partir de una publicación del antiguo Instituto Nacional de Colonización (INC), citada en la bibliografía. El ejemplo debe servir, a mayor abundamiento, para que se infiera como realizar un procedimiento análogo si ya no es una relación lineal sino que es polinómica, potencial, logarítmica, exponencial, etc.

Supongamos que tenemos las siguientes mediciones de las coordenadas de diversos puntos de la malla o red de un terreno a nivelar o explanar (en este caso del centro de la cuadrícula), obtenidas con el instrumento correspondiente (taquímetro, nivel, estación total, GPS, ...):

Tabla 1. Coordenadas de los vértices de la parcela.

| Vértices | $X_1$ | $X_2$ | $Y_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 162,5 | 112,5 | 23,04 |
| 2 | 137,5 | 112,5 | 25,02 |
| 3 | 112,5 | 112,5 | 26,22 |
| 4 | 87,5 | 112,5 | 22,80 |
| 5 | 62,5 | 112,5 | 25,27 |
| 6 | 37,5 | 112,5 | 25,51 |
| 7 | 12,5 | 112,5 | 22,91 |
| 8 | 162,5 | 87,5 | 24,61 |
| 9 | 137,5 | 87,5 | 26,90 |
| 10 | 112,5 | 87,5 | 26,55 |
| 11 | 87,5 | 87,5 | 21,61 |
| 12 | 62,5 | 87,5 | 23,94 |
| 13 | 37,5 | 87,5 | 23,20 |
| 14 | 12,5 | 87,5 | 22,04 |
| 15 | 162,5 | 62,5 | 30,22 |
| 16 | 137,5 | 62,5 | 29,12 |
| 17 | 112,5 | 62,5 | 26,80 |

| Vértices | $X_1$ | $X_2$ | $Y_i$ |
|---|---|---|---|
| 18 | 87,5 | 62,5 | 22,22 |
| 19 | 62,5 | 62,5 | 24,81 |
| 20 | 37,5 | 62,5 | 24,02 |
| 21 | 12,5 | 62,5 | 22,80 |
| 22 | 162,5 | 37,5 | 31,63 |
| 23 | 137,5 | 37,5 | 28,60 |
| 24 | 112,5 | 37,5 | 24,93 |
| 25 | 87,5 | 37,5 | 23,50 |
| 26 | 62,5 | 37,5 | 25,70 |
| 27 | 37,5 | 37,5 | 24,66 |
| 28 | 12,5 | 37,5 | 22,59 |
| 29 | 162,5 | 12,5 | 29,10 |
| 30 | 137,5 | 12,5 | 25,11 |
| 31 | 112,5 | 12,5 | 23,50 |
| 32 | 87,5 | 12,5 | 25,13 |
| 33 | 62,5 | 12,5 | 24,66 |
| 34 | 37,5 | 12,5 | 23,81 |
| 35 | 12,5 | 12,5 | 22,22 |

, donde a los efectos de los trabajos topográficos, dichas variables se corresponden con las tres coordenadas: $X_1$ = X, $X_2$ = Y, Y = Z, que pueden ser absolutas UTM o bien relativas al objeto de simplificar los cálculos subsiguientes.

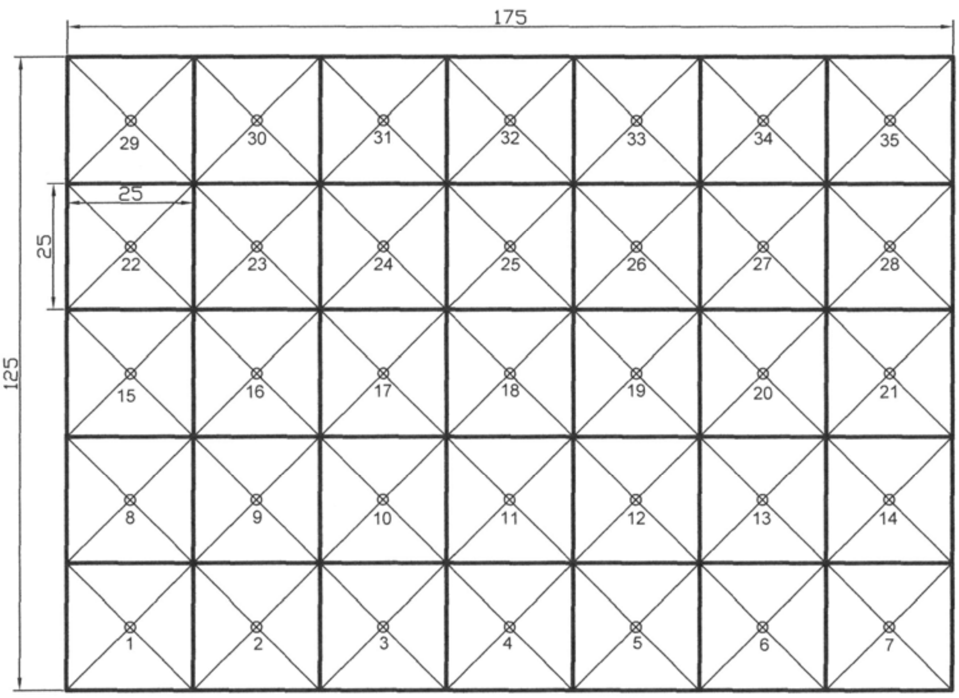



Fig. 1. Planta de la cuadrícula.

La función a la que se desea ajustar, si se trata de un plano de nivelación, es del tipo: $\mathbf{Y = a + b \cdot X_1 + c \cdot X_2}$, pero podría ser también de cualquier otro tipo (superficie alabeada, cuádrica, logarítmica, exponencial, potencial, etc.). Cabe, entonces, hacerse la siguiente pregunta: **¿cómo se sabe a qué tipo de función matemática se debe ajustar por el método de los mínimos cuadrados?.** Una forma de hacerse una idea de ello es ***graficar*** cada variable independiente con la variable dependiente (cada X con la Y), y según la forma que exprese cada gráfica se puede inferir la forma de la función. Nuestro problema se reduce entonces a encontrar los valores de **a, b** y **c** de tal manera que se minimice el error o coste que, en nuestro caso, representa el monto del volumen del movimiento de tierras a efectuar (desmonte y terraplenado), y ello lo podemos expresar como: **Error = $\sum d_i^2$ = Sumatoria $(Y\text{-}Yi)^2$**. El cuadrado es para que el error dé siempre positivo, e Y es el valor calculado final (el que resulta de efectuar la operación: $a + b \cdot X_1 + c \cdot X_2$) e Yi es la medición i-ésima que expresa las diferentes cotas taquimétricas de los puntos de la malla o red planteada sobre el terreno a explanar.

## 1.2. Aplicación de la hoja de cálculo *Excel* con *Solver*

Primeramente, hagamos el formato tal como se ve en la figura siguiente:

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | A | B | C | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | X=X1 | Y=X2 | Z=Yi | Y | Error | Error^2 |
| 5 | 162,5 | 112,5 | 23,04 | | | |
| 6 | 137,5 | 112,5 | 25,02 | | | |
| 7 | 112,5 | 112,5 | 26,22 | | | |
| 8 | 87,5 | 112,5 | 22,8 | | | |
| 9 | 62,5 | 112,5 | 25,27 | | | |
| 10 | 37,5 | 112,5 | 25,51 | | | |
| 11 | 12,5 | 112,5 | 22,91 | | | |
| 12 | 162,5 | 87,5 | 24,61 | | | |
| 13 | 137,5 | 87,5 | 26,9 | | | |
| 14 | 112,5 | 87,5 | 26,55 | | | |
| 15 | 87,5 | 87,5 | 21,61 | | | |
| 16 | 62,5 | 87,5 | 23,94 | | | |
| 17 | 37,5 | 87,5 | 23,2 | | | |
| 18 | 12,5 | 87,5 | 22,04 | | | |
| 19 | 162,5 | 62,5 | 30,22 | | | |
| 20 | 137,5 | 62,5 | 29,12 | | | |
| 21 | 112,5 | 62,5 | 26,8 | | | |
| 22 | 87,5 | 62,5 | 22,22 | | | |
| 23 | 62,5 | 62,5 | 24,81 | | | |
| 24 | 37,5 | 62,5 | 24,02 | | | |
| 25 | 12,5 | 62,5 | 22,8 | | | |
| 26 | 162,5 | 37,5 | 31,63 | | | |
| 27 | 137,5 | 37,5 | 28,6 | | | |
| 28 | 112,5 | 37,5 | 24,93 | | | |
| 29 | 87,5 | 37,5 | 23,5 | | | |
| 30 | 62,5 | 37,5 | 25,7 | | | |
| 31 | 37,5 | 37,5 | 24,66 | | | |
| 32 | 12,5 | 37,5 | 22,59 | | | |
| 33 | 162,5 | 12,5 | 29,1 | | | |
| 34 | 137,5 | 12,5 | 25,11 | | | |
| 35 | 112,5 | 12,5 | 23,5 | | | |
| 36 | 87,5 | 12,5 | 25,13 | | | |
| 37 | 62,5 | 12,5 | 24,66 | | | |
| 38 | 37,5 | 12,5 | 23,81 | | | |
| 39 | 12,5 | 12,5 | 22,22 | | | |

Las celdas A2, B2, C2 se corresponderán con los valores buscados de a, b y c. El meollo del asunto estriba en escribir una fórmula en la columna D que esté en función de A2, B2, C2 y de cada valor que vayan tomando las variables o coordenadas $X_1$ y $X_2$ que se encuentran en la columna A y B después de la fila 5.

Si se tuviera otra función cualquiera de las muchas contempladas en la teoría del presente libro, los parámetros adicionales se escribirían a la derecha de la C y la fórmula de la columna D (o la columna correspondiente) cambiaría según la función pero lo demás sería exactamente igual.

La fórmula de Y será:

**D5 = $A$2 + $B$2*A5 + $C$2*B5**

siendo:

a = $A$2<br>
b = $B$2<br>
$X_1$ = A5<br>
c = $C$2<br>
$X_2$ = B5

Nótese que para los valores **a**, **b**, y **c** se usó la doble expresión $$ para denotar que la referencia no cambiará para ninguna celda donde se copie y pegue la fórmula en cuestión; en cambio para $X_1$ y $X_2$ no ha sido así.

La fórmula se debe copiar y pegar (o arrastrar) a las celdas D6, D7 y D8. Para la columna E la fórmula es la diferencia existente entre Y e $Y_i$, o sea: E5 = C5 - D5, y se copia y pega (o se arrastra) para las demás hacia abajo. En la columna F, la fórmula será la columna E al cuadrado, esto es: F5 = E5^2.

En la celda F9 se dejará el cuadrado de la suma de los errores o discrepancias entre los valores de las cotas iniciales del terreno natural y las resultantes del proceso de cálculo que aquí se presenta, y esa será precisamente la celda cuyo valor nos interesa que alcance un valor mínimo.

La pinta resultante debe ser estructurada como la que se presenta a continuación:

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | A | B | C | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | X=X1 | Y=X2 | Z=Yi | Y | Error | Error^2 |
| 5 | 162,5 | 112,5 | 23,04 | 0 | 23,04 | 530,8416 |
| 6 | 137,5 | 112,5 | 25,02 | 0 | 25,02 | 626,0004 |
| 7 | 112,5 | 112,5 | 26,22 | 0 | 26,22 | 687,4884 |
| 8 | 87,5 | 112,5 | 22,8 | 0 | 22,8 | 519,84 |
| 9 | 62,5 | 112,5 | 25,27 | 0 | 25,27 | 638,5729 |
| 10 | 37,5 | 112,5 | 25,51 | 0 | 25,51 | 650,7601 |
| 11 | 12,5 | 112,5 | 22,91 | 0 | 22,91 | 524,8681 |
| 12 | 162,5 | 87,5 | 24,61 | 0 | 24,61 | 605,6521 |
| 13 | 137,5 | 87,5 | 26,9 | 0 | 26,9 | 723,61 |
| 14 | 112,5 | 87,5 | 26,55 | 0 | 26,55 | 704,9025 |
| 15 | 87,5 | 87,5 | 21,61 | 0 | 21,61 | 466,9921 |
| 16 | 62,5 | 87,5 | 23,94 | 0 | 23,94 | 573,1236 |
| 17 | 37,5 | 87,5 | 23,2 | 0 | 23,2 | 538,24 |
| 18 | 12,5 | 87,5 | 22,04 | 0 | 22,04 | 485,7616 |
| 19 | 162,5 | 62,5 | 30,22 | 0 | 30,22 | 913,2484 |
| 20 | 137,5 | 62,5 | 29,12 | 0 | 29,12 | 847,9744 |
| 21 | 112,5 | 62,5 | 26,8 | 0 | 26,8 | 718,24 |
| 22 | 87,5 | 62,5 | 22,22 | 0 | 22,22 | 493,7284 |
| 23 | 62,5 | 62,5 | 24,81 | 0 | 24,81 | 615,5361 |
| 24 | 37,5 | 62,5 | 24,02 | 0 | 24,02 | 576,9604 |
| 25 | 12,5 | 62,5 | 22,8 | 0 | 22,8 | 519,84 |
| 26 | 162,5 | 37,5 | 31,63 | 0 | 31,63 | 1000,4569 |
| 27 | 137,5 | 37,5 | 28,6 | 0 | 28,6 | 817,96 |
| 28 | 112,5 | 37,5 | 24,93 | 0 | 24,93 | 621,5049 |
| 29 | 87,5 | 37,5 | 23,5 | 0 | 23,5 | 552,25 |
| 30 | 62,5 | 37,5 | 25,7 | 0 | 25,7 | 660,49 |
| 31 | 37,5 | 37,5 | 24,66 | 0 | 24,66 | 608,1156 |
| 32 | 12,5 | 37,5 | 22,59 | 0 | 22,59 | 510,3081 |
| 33 | 162,5 | 12,5 | 29,1 | 0 | 29,1 | 846,81 |
| 34 | 137,5 | 12,5 | 25,11 | 0 | 25,11 | 630,5121 |
| 35 | 112,5 | 12,5 | 23,5 | 0 | 23,5 | 552,25 |
| 36 | 87,5 | 12,5 | 25,13 | 0 | 25,13 | 631,5169 |
| 37 | 62,5 | 12,5 | 24,66 | 0 | 24,66 | 608,1156 |
| 38 | 37,5 | 12,5 | 23,81 | 0 | 23,81 | 566,9161 |
| 39 | 12,5 | 12,5 | 22,22 | 0 | 22,22 | 493,7284 |
| 40 | | | | | Suma | 22063,116 |

Luego, una vez obtenida la tabla anterior, se debe invocar el *Solver* del *Excel* haciendo “click” en “Herramientas” y luego en “Solver” (si no aparece habrá que buscarlo en la opción de “complementos” del mismo menú), y le indicaremos que deseamos minimizar el valor de la celda F9 cambiando el valor de las celdas A2, B2 y C2, tal como se ve en la siguiente figura:

Entonces hacemos "click" en resolver y se tendrá la siguiente pantalla:

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 22,924713 | 0,0310972 | -0,0104457 | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | X=X1 | Y=X2 | Z=Yi | Y | Error | Error^2 |
| 5 | 162,5 | 112,5 | 23,04 | 26,802858 | -3,7628581 | 14,159101 |
| 6 | 137,5 | 112,5 | 25,02 | 26,025429 | -1,0054293 | 1,0108881 |
| 7 | 112,5 | 112,5 | 26,22 | 25,248001 | 0,9719994 | 0,9447829 |
| 8 | 87,5 | 112,5 | 22,8 | 24,470572 | -1,6705718 | 2,7908101 |
| 9 | 62,5 | 112,5 | 25,27 | 23,693143 | 1,576857 | 2,486478 |
| 10 | 37,5 | 112,5 | 25,51 | 22,915714 | 2,5942858 | 6,7303186 |
| 11 | 12,5 | 112,5 | 22,91 | 22,138285 | 0,7717145 | 0,5955433 |
| 12 | 162,5 | 87,5 | 24,61 | 27,064001 | -2,4540007 | 6,0221193 |
| 13 | 137,5 | 87,5 | 26,9 | 26,286572 | 0,6134281 | 0,376294 |
| 14 | 112,5 | 87,5 | 26,55 | 25,509143 | 1,0408569 | 1,083383 |
| 15 | 87,5 | 87,5 | 21,61 | 24,731714 | -3,1217143 | 9,7451005 |
| 16 | 62,5 | 87,5 | 23,94 | 23,954286 | -0,0142856 | 0,0002041 |
| 17 | 37,5 | 87,5 | 23,2 | 23,176857 | 0,0231432 | 0,0005356 |
| 18 | 12,5 | 87,5 | 22,04 | 22,399428 | -0,359428 | 0,1291885 |
| 19 | 162,5 | 62,5 | 30,22 | 27,325143 | 2,8948568 | 8,3801957 |
| 20 | 137,5 | 62,5 | 29,12 | 26,547714 | 2,5722855 | 6,6166529 |
| 21 | 112,5 | 62,5 | 26,8 | 25,770286 | 1,0297143 | 1,0603116 |
| 22 | 87,5 | 62,5 | 22,22 | 24,992857 | -2,7728569 | 7,6887354 |
| 23 | 62,5 | 62,5 | 24,81 | 24,215428 | 0,5945719 | 0,3535157 |
| 24 | 37,5 | 62,5 | 24,02 | 23,437999 | 0,5820006 | 0,3387247 |
| 25 | 12,5 | 62,5 | 22,8 | 22,660571 | 0,1394294 | 0,0194406 |
| 26 | 162,5 | 37,5 | 31,63 | 27,586286 | 4,0437142 | 16,351625 |
| 27 | 137,5 | 37,5 | 28,6 | 26,808857 | 1,791143 | 3,2081932 |
| 28 | 112,5 | 37,5 | 24,93 | 26,031428 | -1,1014283 | 1,2131442 |
| 29 | 87,5 | 37,5 | 23,5 | 25,253999 | -1,7539995 | 3,0765142 |
| 30 | 62,5 | 37,5 | 25,7 | 24,476571 | 1,2234293 | 1,4967792 |
| 31 | 37,5 | 37,5 | 24,66 | 23,699142 | 0,9608581 | 0,9232482 |
| 32 | 12,5 | 37,5 | 22,59 | 22,921713 | -0,3317132 | 0,1100336 |
| 33 | 162,5 | 12,5 | 29,1 | 27,847428 | 1,2525716 | 1,5689357 |
| 34 | 137,5 | 12,5 | 25,11 | 27,07 | -1,9599996 | 3,8415984 |
| 35 | 112,5 | 12,5 | 23,5 | 26,292571 | -2,7925708 | 7,7984518 |
| 36 | 87,5 | 12,5 | 25,13 | 25,515142 | -0,385142 | 0,1483344 |
| 37 | 62,5 | 12,5 | 24,66 | 24,737713 | -0,0777133 | 0,0060394 |
| 38 | 37,5 | 12,5 | 23,81 | 23,960284 | -0,1502845 | 0,0225854 |
| 39 | 12,5 | 12,5 | 22,22 | 23,182856 | -0,9628557 | 0,9270911 |
| 40 | | | | | Suma | 111,2249 |

Resultados de Solver

Solver ha llegado a esta solución. Se han satisfecho todas las restricciones.

Informes

Utilizar solución de Solver

Restaurar valores originales

Respuestas
Sensibilidad
Límites

Aceptar | Cancelar | Guardar escenario... | Ayuda

Así pues, se obtienen los siguientes coeficientes en la ecuación del plano definitivo del bancal (ajustando a tres decimales, o sea, con precisión milimétrica):

A = 22'92471
B = 0'0311
C = -0'01045

De esta suerte, la expresión general del plano resultante será:

**0'0311·X - 0'01045·Y – Z + 22'92471 = 0**

con lo que para hallar las cotas taquimétricas definitivas de los 35 vértices despejaremos:

Z = 22'92471 + 0'03110·X - 0'01045·Y

A resultas de lo anterior, obtendremos dichas cotas definitivas en la siguiente tabla que realizaremos también con el *excel* siguiendo estos pasos.

Primero suprimiremos las columnas E y F que nos servían para hacer el cálculo anterior y que ahora ya no resultan necesarias. A continuación, se designa la columna E para el cálculo de las cotas definitivas Z mediante la fórmula:

E5 = 22,92471+0,0311*A5-0,01045*B5.

Arrastramos la fórmula para toda la columna y reducimos las cifras decimales a tres. Debemos, entonces, obtener inmediatamente la siguiente pantalla:

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | A | B | C | | | |
| 2 | 22,924713 | 0,0310972 | -0,0104457 | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | X=X1 | Y=X2 | Z=Yi | Y | Z | |
| 5 | 162,5 | 112,5 | 23,04 | 26,802858 | 26,803 | |
| 6 | 137,5 | 112,5 | 25,02 | 26,025429 | 26,025 | |
| 7 | 112,5 | 112,5 | 26,22 | 25,248001 | 25,248 | |
| 8 | 87,5 | 112,5 | 22,8 | 24,470572 | 24,470 | |
| 9 | 62,5 | 112,5 | 25,27 | 23,693143 | 23,693 | |
| 10 | 37,5 | 112,5 | 25,51 | 22,915714 | 22,915 | |
| 11 | 12,5 | 112,5 | 22,91 | 22,138285 | 22,138 | |
| 12 | 162,5 | 87,5 | 24,61 | 27,064001 | 27,064 | |
| 13 | 137,5 | 87,5 | 26,9 | 26,286572 | 26,287 | |
| 14 | 112,5 | 87,5 | 26,55 | 25,509143 | 25,509 | |
| 15 | 87,5 | 87,5 | 21,61 | 24,731714 | 24,732 | |
| 16 | 62,5 | 87,5 | 23,94 | 23,954286 | 23,954 | |
| 17 | 37,5 | 87,5 | 23,2 | 23,176857 | 23,177 | |
| 18 | 12,5 | 87,5 | 22,04 | 22,399428 | 22,399 | |
| 19 | 162,5 | 62,5 | 30,22 | 27,325143 | 27,325 | |
| 20 | 137,5 | 62,5 | 29,12 | 26,547714 | 26,548 | |
| 21 | 112,5 | 62,5 | 26,8 | 25,770286 | 25,770 | |
| 22 | 87,5 | 62,5 | 22,22 | 24,992857 | 24,993 | |
| 23 | 62,5 | 62,5 | 24,81 | 24,215428 | 24,215 | |
| 24 | 37,5 | 62,5 | 24,02 | 23,437999 | 23,438 | |
| 25 | 12,5 | 62,5 | 22,8 | 22,660571 | 22,660 | |
| 26 | 162,5 | 37,5 | 31,63 | 27,586286 | 27,587 | |
| 27 | 137,5 | 37,5 | 28,6 | 26,808857 | 26,809 | |
| 28 | 112,5 | 37,5 | 24,93 | 26,031428 | 26,032 | |
| 29 | 87,5 | 37,5 | 23,5 | 25,253999 | 25,254 | |
| 30 | 62,5 | 37,5 | 25,7 | 24,476571 | 24,477 | |
| 31 | 37,5 | 37,5 | 24,66 | 23,699142 | 23,699 | |
| 32 | 12,5 | 37,5 | 22,59 | 22,921713 | 22,922 | |
| 33 | 162,5 | 12,5 | 29,1 | 27,847428 | 27,848 | |
| 34 | 137,5 | 12,5 | 25,11 | 27,07 | 27,070 | |
| 35 | 112,5 | 12,5 | 23,5 | 26,292571 | 26,293 | |
| 36 | 87,5 | 12,5 | 25,13 | 25,515142 | 25,515 | |
| 37 | 62,5 | 12,5 | 24,66 | 24,737713 | 24,738 | |
| 38 | 37,5 | 12,5 | 23,81 | 23,960284 | 23,960 | |
| 39 | 12,5 | 12,5 | 22,22 | 23,182856 | 23,183 | |

El siguiente paso consiste en obtener la corrección en altura a efectuar para conseguir las cotas definitivas del terreno en cada estaca o vértice, para lo que restaremos de la columna obtenida las cotas del terreno inicial, designando la columna F (corregido) de la siguiente forma:

F5 = E5-C5.

Nos queda, entonces, la siguiente pantalla:

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | A | B | C | | | |
| 2 | 22,924713 | 0,0310972 | -0,0104457 | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | X=X1 | Y=X2 | Z=Yi | Y | Z | Corregido |
| 5 | 162,5 | 112,5 | 23,04 | 26,802858 | 26,803 | 3,763 |
| 6 | 137,5 | 112,5 | 25,02 | 26,025429 | 26,025 | 1,005 |
| 7 | 112,5 | 112,5 | 26,22 | 25,248001 | 25,248 | -0,972 |
| 8 | 87,5 | 112,5 | 22,8 | 24,470572 | 24,470 | 1,670 |
| 9 | 62,5 | 112,5 | 25,27 | 23,693143 | 23,693 | -1,577 |
| 10 | 37,5 | 112,5 | 25,51 | 22,915714 | 22,915 | -2,595 |
| 11 | 12,5 | 112,5 | 22,91 | 22,138285 | 22,138 | -0,772 |
| 12 | 162,5 | 87,5 | 24,61 | 27,064001 | 27,064 | 2,454 |
| 13 | 137,5 | 87,5 | 26,9 | 26,286572 | 26,287 | -0,613 |
| 14 | 112,5 | 87,5 | 26,55 | 25,509143 | 25,509 | -1,041 |
| 15 | 87,5 | 87,5 | 21,61 | 24,731714 | 24,732 | 3,122 |
| 16 | 62,5 | 87,5 | 23,94 | 23,954286 | 23,954 | 0,014 |
| 17 | 37,5 | 87,5 | 23,2 | 23,176857 | 23,177 | -0,023 |
| 18 | 12,5 | 87,5 | 22,04 | 22,399428 | 22,399 | 0,359 |
| 19 | 162,5 | 62,5 | 30,22 | 27,325143 | 27,325 | -2,895 |
| 20 | 137,5 | 62,5 | 29,12 | 26,547714 | 26,548 | -2,572 |
| 21 | 112,5 | 62,5 | 26,8 | 25,770286 | 25,770 | -1,030 |
| 22 | 87,5 | 62,5 | 22,22 | 24,992857 | 24,993 | 2,773 |
| 23 | 62,5 | 62,5 | 24,81 | 24,215428 | 24,215 | -0,595 |
| 24 | 37,5 | 62,5 | 24,02 | 23,437999 | 23,438 | -0,582 |
| 25 | 12,5 | 62,5 | 22,8 | 22,660571 | 22,660 | -0,140 |
| 26 | 162,5 | 37,5 | 31,63 | 27,586286 | 27,587 | -4,043 |
| 27 | 137,5 | 37,5 | 28,6 | 26,808857 | 26,809 | -1,791 |
| 28 | 112,5 | 37,5 | 24,93 | 26,031428 | 26,032 | 1,102 |
| 29 | 87,5 | 37,5 | 23,5 | 25,253999 | 25,254 | 1,754 |
| 30 | 62,5 | 37,5 | 25,7 | 24,476571 | 24,477 | -1,223 |
| 31 | 37,5 | 37,5 | 24,66 | 23,699142 | 23,699 | -0,961 |
| 32 | 12,5 | 37,5 | 22,59 | 22,921713 | 22,922 | 0,332 |
| 33 | 162,5 | 12,5 | 29,1 | 27,847428 | 27,848 | -1,252 |
| 34 | 137,5 | 12,5 | 25,11 | 27,07 | 27,070 | 1,960 |
| 35 | 112,5 | 12,5 | 23,5 | 26,292571 | 26,293 | 2,793 |
| 36 | 87,5 | 12,5 | 25,13 | 25,515142 | 25,515 | 0,385 |
| 37 | 62,5 | 12,5 | 24,66 | 24,737713 | 24,738 | 0,078 |
| 38 | 37,5 | 12,5 | 23,81 | 23,960284 | 23,960 | 0,150 |
| 39 | 12,5 | 12,5 | 22,22 | 23,182856 | 23,183 | 0,963 |

Como consecuencia de los valores así obtenidos de las cotas corregidas, podemos elaborar la siguiente tabla pegando las diversas columnas al texto en **Microsoft Word®**:

Tabla 2. Cotas definitivas y correcciones.

| Vértices | Cotas del terreno inicial | Puntos teóricos del plano (X,Y) | Cotas definitivas Z | Corregido $d_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 23,04 | (162’5,112’5) | 26,803 | +3,763 |
| 2 | 25,02 | (137’5,112’5) | 26,025 | +1,005 |
| 3 | 26,22 | (112’5,112’5) | 25,248 | -0,972 |
| 4 | 22,80 | (87’5,112’5) | 24,470 | +1,670 |
| 5 | 25,27 | (62’5,112’5) | 23,693 | -1,577 |
| 6 | 25,51 | (37’5,112’5) | 22,915 | -2,595 |
| 7 | 22,91 | (12’5,112’5) | 22,138 | -0,772 |
| 8 | 24,61 | (162’5,87’5) | 27,064 | +2,454 |
| 9 | 26,90 | (137’5,87’5) | 26,287 | -0,613 |
| 10 | 26,55 | (112’5,87’5) | 25,509 | -1,041 |
| 11 | 21,61 | (87’5,87’5) | 24,732 | +3,122 |
| 12 | 23,94 | (62’5,87’5) | 23,954 | +0,014 |
| 13 | 23,20 | (37’5,87’5) | 23,177 | -0,023 |
| 14 | 22,04 | (12’5,87’5) | 22,399 | +0,359 |
| 15 | 30,22 | (162’5,62’5) | 27,325 | -2,895 |
| 16 | 29,12 | (137’5,62’5) | 26,548 | -2,572 |
| 17 | 26,80 | (112’5,62’5) | 25,770 | -1,030 |
| 18 | 22,22 | (87’5,62’5) | 24,993 | +2,773 |
| 19 | 24,81 | (62’5,62’5) | 24,215 | -0,595 |
| 20 | 24,02 | (37’5,62’5) | 23,438 | -0,582 |
| 21 | 22,80 | (12’5,62’5) | 22,660 | -0,140 |
| 22 | 31,63 | (162’5,37’5) | 27,587 | -4,043 |
| 23 | 28,60 | (137’5,37’5) | 26,809 | -1,791 |
| 24 | 24,93 | (112’5,37’5) | 26,032 | +1,102 |
| 25 | 23,50 | (87’5,37’5) | 25,254 | +1,754 |
| 26 | 25,70 | (62’5,37’5) | 24,477 | -1,223 |
| 27 | 24,66 | (37’5,37’5) | 23,699 | -0,961 |
| 28 | 22,59 | (12’5,37’5) | 22,922 | +0,332 |
| 29 | 29,10 | (162’5,12’5) | 27,848 | -1,252 |
| 30 | 25,11 | (137’5,12’5) | 27,070 | +1,960 |
| 31 | 23,50 | (112’5,12’5) | 26,293 | +2,793 |
| 32 | 25,13 | (87’5,12’5) | 25,515 | +0,385 |
| 33 | 24,66 | (62’5,12’5) | 24,738 | +0,078 |
| 34 | 23,81 | (37’5,12’5) | 23,960 | +0,150 |
| 35 | 22,22 | (12’5,12’5) | 23,183 | +0,963 |

También como consecuencia de las correcciones que se expresan en el cuadro anterior, resultará el siguiente movimiento de tierras en términos volumétricos que deducimos también de la hoja de cálculo multiplicando la superficie de cada subparcela (25 x 25 = 625 $m^2$) por la corrección en altura o cota correspondiente (el signo “+” implica terraplén y el “–“ implica desmonte), notándose que esta estimación resulta ser sólo una aproximación, teniendo en cuenta las superficies de las subparcelas tributarias o anexas de cada vértice o estaca:

Tabla 3. Movimiento de tierras resultante.

| **Vértices** | **Superficie ($m^2$)** | **Corrección (m)** | **Volumen ($m^3$)** |
|---|---|---|---|
| 1 | 625 | +3,763 | 2.351,875 |
| 2 | 625 | +1,005 | 628,125 |
| 3 | 625 | -0,972 | -607,5 |
| 4 | 625 | +1,670 | 1.043,75 |
| 5 | 625 | -1,577 | -985,625 |
| 6 | 625 | -2,595 | -1.621,875 |
| 7 | 625 | -0,772 | -482,5 |
| 8 | 625 | +2,454 | 1.533,75 |
| 9 | 625 | -0,613 | -383,125 |
| 10 | 625 | -1,041 | -650,625 |
| 11 | 625 | +3,122 | 1.951,25 |
| 12 | 625 | +0,014 | 8,75 |
| 13 | 625 | -0,023 | -14,375 |
| 14 | 625 | +0,359 | 224,375 |
| 15 | 625 | -2,895 | -1.809,375 |
| 16 | 625 | -2,572 | -1.607,5 |
| 17 | 625 | -1,030 | -643,75 |
| 18 | 625 | +2,773 | 1.733,125 |
| 19 | 625 | -0,595 | -371,875 |
| 20 | 625 | -0,582 | -363,75 |
| 21 | 625 | -0,140 | -87,5 |
| 22 | 625 | -4,043 | -2.526,875 |
| 23 | 625 | -1,791 | -1.119,375 |
| 24 | 625 | +1,102 | 688,75 |
| 25 | 625 | +1,754 | 1.096,25 |
| 26 | 625 | -1,223 | -764,375 |
| 27 | 625 | -0,961 | -600,625 |
| 28 | 625 | +0,332 | 207,5 |
| 29 | 625 | -1,252 | -782,5 |
| 30 | 625 | +1,960 | 1.225 |
| 31 | 625 | +2,793 | 1.745,625 |
| 32 | 625 | +0,385 | 240,625 |
| 33 | 625 | +0,078 | 48,75 |
| 34 | 625 | +0,150 | 93,75 |
| 35 | 625 | +0,963 | 601,875 |
| ***TOTAL*** | **21.875** (625x35) | ±0’000 | ± **0,000** |

, por lo que la compensación de tierras resulta absolutamente ajustada y matemáticamente perfecta, no obteniéndose volúmenes ni de tierras sobrantes ni de tierras a aportar a la parcela, salvando la consideración de los pertinentes coeficientes de esponjamiento y/o compactación posterior que haya que aplicar en su caso. Este cálculo, que se deduce del cuadro anterior, puede ser contrastado con la cuantificación correspondiente mediante el estudio de los perfiles transversales y longitudinales de la parcela en estudio, determinados por la malla o red de vértices que nos ocupa. Para tener una medida del grado de explanación, igualaremos a +10,00 m. la cota relativa media o centro de gravedad de la parcela en estudio, cuyo valor resulta de dividir la suma de las cotas iniciales del terreno natural por el número de vértices (874’75 m./35 = 24’993 m.), por lo que tendremos que restar: 24’993 – 10’000 = 14’993 m. de cada una de las cotas iniciales y definitivas. Si se desea complementariamente calcular el “grado de explanación” determinado, como ya se ha visto, por el “coeficiente de contingencia” derivado de la distribución de probabilidad chi-cuadrado ($\chi^2$), debemos ampliar la tabla anterior con dos nuevas columnas del siguiente modo:

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Vértices | Z=Yi | Y | Cot. Rel. Inic. | Cot. Rel. Def. | di | di2 | di2/Rel. Def. |
| 2 | 1 | 23,04 | 26,803 | 8,05 | 11,81 | 3,763 | 14,159 | 1,199 |
| 3 | 2 | 25,02 | 26,025 | 10,03 | 11,03 | 1,005 | 1,011 | 0,092 |
| 4 | 3 | 26,22 | 25,248 | 11,23 | 10,26 | -0,972 | 0,945 | 0,092 |
| 5 | 4 | 22,80 | 24,471 | 7,81 | 9,48 | 1,671 | 2,791 | 0,294 |
| 6 | 5 | 25,27 | 23,693 | 10,28 | 8,70 | -1,577 | 2,486 | 0,286 |
| 7 | 6 | 25,51 | 22,916 | 10,52 | 7,92 | -2,594 | 6,730 | 0,849 |
| 8 | 7 | 22,91 | 22,138 | 7,92 | 7,15 | -0,772 | 0,596 | 0,083 |
| 9 | 8 | 24,61 | 27,064 | 9,62 | 12,07 | 2,454 | 6,022 | 0,499 |
| 10 | 9 | 26,90 | 26,287 | 11,91 | 11,29 | -0,613 | 0,376 | 0,033 |
| 11 | 10 | 26,55 | 25,509 | 11,56 | 10,52 | -1,041 | 1,083 | 0,103 |
| 12 | 11 | 21,61 | 24,732 | 6,62 | 9,74 | 3,122 | 9,745 | 1,001 |
| 13 | 12 | 23,94 | 23,954 | 8,95 | 8,96 | 0,014 | 0,000 | 0,000 |
| 14 | 13 | 23,20 | 23,177 | 8,21 | 8,18 | -0,023 | 0,001 | 0,000 |
| 15 | 14 | 22,04 | 22,399 | 7,05 | 7,41 | 0,359 | 0,129 | 0,017 |
| 16 | 15 | 30,22 | 27,325 | 15,23 | 12,33 | -2,895 | 8,380 | 0,680 |
| 17 | 16 | 29,12 | 26,548 | 14,13 | 11,55 | -2,572 | 6,617 | 0,573 |
| 18 | 17 | 26,80 | 25,770 | 11,81 | 10,78 | -1,030 | 1,060 | 0,098 |
| 19 | 18 | 22,22 | 24,993 | 7,23 | 10,00 | 2,773 | 7,689 | 0,769 |
| 20 | 19 | 24,81 | 24,215 | 9,82 | 9,22 | -0,595 | 0,354 | 0,038 |
| 21 | 20 | 24,02 | 23,438 | 9,03 | 8,44 | -0,582 | 0,339 | 0,040 |
| 22 | 21 | 22,80 | 22,661 | 7,81 | 7,67 | -0,139 | 0,019 | 0,003 |
| 23 | 22 | 31,63 | 27,586 | 16,64 | 12,59 | -4,044 | 16,352 | 1,298 |
| 24 | 23 | 28,60 | 26,809 | 13,61 | 11,82 | -1,791 | 3,208 | 0,272 |
| 25 | 24 | 24,93 | 26,031 | 9,94 | 11,04 | 1,101 | 1,213 | 0,110 |
| 26 | 25 | 23,50 | 25,254 | 8,51 | 10,26 | 1,754 | 3,077 | 0,300 |
| 27 | 26 | 25,70 | 24,477 | 10,71 | 9,48 | -1,223 | 1,497 | 0,158 |
| 28 | 27 | 24,66 | 23,699 | 9,67 | 8,71 | -0,961 | 0,923 | 0,106 |
| 29 | 28 | 22,59 | 22,922 | 7,60 | 7,93 | 0,332 | 0,110 | 0,014 |
| 30 | 29 | 29,10 | 27,847 | 14,11 | 12,85 | -1,253 | 1,569 | 0,122 |
| 31 | 30 | 25,11 | 27,070 | 10,12 | 12,08 | 1,960 | 3,842 | 0,318 |
| 32 | 31 | 23,50 | 26,293 | 8,51 | 11,30 | 2,793 | 7,798 | 0,690 |
| 33 | 32 | 25,13 | 25,515 | 10,14 | 10,52 | 0,385 | 0,148 | 0,014 |
| 34 | 33 | 24,66 | 24,738 | 9,67 | 9,74 | 0,078 | 0,006 | 0,001 |
| 35 | 34 | 23,81 | 23,960 | 8,82 | 8,97 | 0,150 | 0,023 | 0,003 |
| 36 | 35 | 22,22 | 23,183 | 7,23 | 8,19 | 0,963 | 0,927 | 0,113 |
| 37 | | | | 350,0 | 350,0 | 0,000 | 111,225 | 10,268 |

Para confeccionar esta tabla debemos comenzar colocando en la primera columna los vértices, en la segunda la Z (cotas iniciales) y en la tercera columna colocaremos la Y (cotas definitivas). En la cuarta columna (cotas relativas iniciales) lo que hacemos es restarle 14,993 a la columna Z de la siguiente manera: D2 = B2 – 14,993. Arrastramos la fórmula para toda la columna y sumamos. En la quinta columna (cotas relativas definitivas) el proceso seguido es el mismo que en la cuarta pero la resta se la debemos hacer a la columna Y. Así: E2 = C2 – 14,993. Arrastramos, sumamos y comprobamos que la suma final nos da igual que la columna anterior.

En la columna siguiente $\mathbf{d_i}$ calculamos la diferencia entre las dos columnas anteriores de la siguiente forma: F2 = E2 – D2. La suma final nos debe dar 0 por las razones teóricas ya expresadas. La columna siguiente $\mathbf{d_i^2}$ es simplemente el cuadrado de la anterior, así: G2 = F2^2.

Por último, en la última columna $\mathbf{d_i^2}$**/rel.def.** vamos a realizar una división. Para ello aplicamos la siguiente fórmula: H2 = G2/E2. Arrastramos dicha fórmula para toda la columna y sumamos. El resultado de esta suma, si hemos realizado todos los pasos correctamente, ofrece la medida buscada del grado de explanación dada por la $\chi^2$ y, posteriormente, por el coeficiente de contingencia C.

Si ahora utilizamos el programa *EViews*, al que hacemos referencia en el epígrafe siguiente, obtendremos para el ajuste pretendido el siguiente resultado, con especificación de diversos coeficientes de indudable relevancia estadística:

Forma Funcional: Z = a + b·X + c·Y (plano)

Dependent Variable: Z
Method: Least Squares
Included observations: 35

| Variable | Coefficient | Standard Error | t-Statistic | Probability |
|---|---|---|---|---|
| a | 22.92471 | 0.844853 | 27.13457 | 0.0000 |
| X (b) | 0.031097 | 0.006303 | 4.933993 | 0.0000 |
| Y (c) | -0.010446 | 0.008913 | -1.171929 | 0.2499 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.445577 | Mean dependent variable | 24.99286 |
| Adjusted R-squared | 0.410926 | S.D. dependent variable | 2.429076 |
| S.E. of regression | 1.864344 | Akaike info criterion | 4.165512 |
| Sum squared resid | 111.2249 | Schwarz criterion | 4.298827 |
| Log likelihood | -69.89646 | F-statistic | 12.85885 |
| Durbin-Watson statistic | 1.612869 | Prob (F-statistic) | 0.000080 |

*Observaciones*:

1.- El valor de $R^2$ es relativamente bajo.

2.- El coeficiente de la variable “Y” es NO significativo, que quiere decir que no es diferente de cero ($H_o$; $\beta$ = 0. No puede rechazarse, entonces, la hipótesis nula. Esto es precisamente lo que contrastamos con el valor de la “t” de Student-Gosset).

3.- Estos comentarios son iguales para todas las estimaciones que siguen, por lo que nos ahorraremos su mención en cada caso.

4.- Como el coeficiente de la variable “Y” es no significativo lo hemos eliminado de la regresión y se ha obtenido un nuevo resultado en el que sólo varía el valor del término constante (esto se ha realizado para todas las especificaciones que hemos probado).

**Ecuación resultante: Z = 22’92471 + 0’031097·X – 0’010446·Y**

que, como puede comprobarse, es la misma que la obtenida mediante la aplicación de la hoja de cálculo de *Microsoft Excel* con *Solver*.

Si ahora, como hemos señalado, prescindiéramos de la variable o coordenada Y (no significativa desde el punto de vista estadístico) se obtendría la siguiente forma funcional: Z = a + bX (es decir sin la variable Y):

Dependent Variable: Z
Method: Least Squares
Included observations: 35

| Variable | Coefficient | Standard Error | t-Statistic | Probability |
|---|---|---|---|---|
| a | 22.27186 | 0.638752 | 34.86779 | 0.0000 |
| X (b) | 0.031097 | 0.006338 | 4.906312 | 0.0000 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.421782 | Mean dependent variable | 24.99286 |
| Adjusted R-squared | 0.404260 | S.D. dependent variable | 2.429076 |
| S.E. of regression | 1.874862 | Akaike info criterion | 4.150393 |
| Sum squared resid | 115.9986 | Schwarz criterion | 4.239270 |
| Log likelihood | -70.63187 | F-statistic | 24.07189 |
| Durbin-Watson statistic | 1.573687 | Prob (F-statistic) | 0.000024 |

**Ecuación resultante: Z = 22’27186 + 0’031097·X**

En este último caso, los valores de las cotas taquimétricas definitivas de la parcela pueden verse en la última columna del cuadro de *Excel* siguiente, comparados con los anteriores (2 variables):

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Vértices | X m. | Y m. | Z m. | Z (2 var.) | Z (1 var.) |
| 2 | 1 | 162,5 | 112,5 | 23,04 | 26,803 | 27,325 |
| 3 | 2 | 137,5 | 112,5 | 25,02 | 26,025 | 26,548 |
| 4 | 3 | 112,5 | 112,5 | 26,22 | 25,248 | 25,770 |
| 5 | 4 | 87,5 | 112,5 | 22,8 | 24,471 | 24,993 |
| 6 | 5 | 62,5 | 112,5 | 25,27 | 23,693 | 24,215 |
| 7 | 6 | 37,5 | 112,5 | 25,51 | 22,916 | 23,438 |
| 8 | 7 | 12,5 | 112,5 | 22,91 | 22,138 | 22,661 |
| 9 | 8 | 162,5 | 87,5 | 24,61 | 27,064 | 27,325 |
| 10 | 9 | 137,5 | 87,5 | 26,9 | 26,287 | 26,548 |
| 11 | 10 | 112,5 | 87,5 | 26,55 | 25,509 | 25,770 |
| 12 | 11 | 87,5 | 87,5 | 21,61 | 24,732 | 24,993 |
| 13 | 12 | 62,5 | 87,5 | 23,94 | 23,954 | 24,215 |
| 14 | 13 | 37,5 | 87,5 | 23,2 | 23,177 | 23,438 |
| 15 | 14 | 12,5 | 87,5 | 22,04 | 22,399 | 22,661 |
| 16 | 15 | 162,5 | 62,5 | 30,22 | 27,325 | 27,325 |
| 17 | 16 | 137,5 | 62,5 | 29,12 | 26,548 | 26,548 |
| 18 | 17 | 112,5 | 62,5 | 26,8 | 25,770 | 25,770 |
| 19 | 18 | 87,5 | 62,5 | 22,22 | 24,993 | 24,993 |
| 20 | 19 | 62,5 | 62,5 | 24,81 | 24,215 | 24,215 |
| 21 | 20 | 37,5 | 62,5 | 24,02 | 23,438 | 23,438 |
| 22 | 21 | 12,5 | 62,5 | 22,8 | 22,661 | 22,661 |
| 23 | 22 | 162,5 | 37,5 | 31,63 | 27,586 | 27,325 |
| 24 | 23 | 137,5 | 37,5 | 28,6 | 26,809 | 26,548 |
| 25 | 24 | 112,5 | 37,5 | 24,93 | 26,031 | 25,770 |
| 26 | 25 | 87,5 | 37,5 | 23,5 | 25,254 | 24,993 |
| 27 | 26 | 62,5 | 37,5 | 25,7 | 24,477 | 24,215 |
| 28 | 27 | 37,5 | 37,5 | 24,66 | 23,699 | 23,438 |
| 29 | 28 | 12,5 | 37,5 | 22,59 | 22,922 | 22,661 |
| 30 | 29 | 162,5 | 12,5 | 29,1 | 27,847 | 27,325 |
| 31 | 30 | 137,5 | 12,5 | 25,11 | 27,070 | 26,548 |
| 32 | 31 | 112,5 | 12,5 | 23,5 | 26,293 | 25,770 |
| 33 | 32 | 87,5 | 12,5 | 25,13 | 25,515 | 24,993 |
| 34 | 33 | 62,5 | 12,5 | 24,66 | 24,738 | 24,215 |
| 35 | 34 | 37,5 | 12,5 | 23,81 | 23,960 | 23,438 |
| 36 | 35 | 12,5 | 12,5 | 22,22 | 23,183 | 22,661 |

Al respecto de los perfiles longitudinales y transversales de esta parcela, puede consultarse el anexo número 5 (“Complementos”) de este mismo libro.

## 2. AJUSTE NO LINEAL

### 2.1. Estimación logarítmica

Para ello se precisa realizar una REGRESION MULTIPLE LOGARITMICA CON MICROSOFT EXCEL 6.0 (o superior). Como puede suponerse, existen diferentes programas informáticos que pueden facilitar la obtención del modelo más adecuado para el ajuste de una superficie de nivelación no lineal, como el SPSS[1] o el *Econometric*

[1] El SPSS es un programa estadístico informático muy usado en las ciencias sociales y también en las empresas de investigación de mercado. En la actualidad, la sigla se usa tanto para designar el programa estadístico como la empresa que lo produce. Originalmente SPSS fue creado como el acrónimo de *Statistical Package for the Social Sciences* ya que se está popularizando la idea de traducir el acrónimo como "Statistical Product and Service Solutions". Sin embargo, aunque realizando búsquedas por internet estas pueden llevar a la página *web* de la empresa, dentro de la página misma de la empresa no se encuentra dicha denominación. Fue creado en 1968 por Norman H. Nie, C. Hadlai (Tex) Hull y Dale H. Bent. Entre 1969 y 1975 la Universidad de Chicago por medio de su *National Opinion Research Center* estuvo a cargo del desarrollo, distribución y venta del programa. A partir de 1975 corresponde a SPSS

*Views*[2] que, sin duda alguna, son programas especializados para ello. También la subrutina para el cálculo de la regresión múltiple logarítmica de *Microsoft Excel* es similar a la lineal, ya estudiada en otros apartados del presente libro. Se trataría, en este caso, de ajustar una función exponencial del tipo: $Z = A \cdot B^X \cdot C^Y$, con el objetivo de averiguar el valor de los parámetros A, B y C. Al tomar logaritmos neperianos (naturales) o decimales (de Briggs[3]) en ambos miembros de la expresión anterior tiene lugar su "linealización", obteniéndose una ecuación logarítmica lineal, así:

$$\ln Z = \ln A + X \cdot \ln B + Y \cdot \ln C$$

---

Inc. Originalmente el programa fue creado para grandes computadores. En 1970 se publica el primer manual de usuario del SPSS por Nie y Hall. Este manual populariza el programa entre las instituciones de educación superior en EE. UU. En 1984 sale la primera versión para computadores personales. Como programa estadístico es muy popular su uso debido a la capacidad de trabajar con bases de datos de gran tamaño. En la versión 12 es de 2 millones de registros y 250.000 variables. Además, de permitir la recodificación de las variables y registros según las necesidades del usuario. El programa consiste en un módulo base y módulos anexos que se han ido actualizando constantemente con nuevos procedimientos estadísticos. Cada uno de estos módulos se compra por separado. Actualmente, compite no sólo con softwares licenciados como lo son SAS, MatLab, Statistica, Stata, sino también con software de código abierto y libre, de los cuales el más destacado es el Lenguaje R. Desde la versión 14, pero más específicamente desde la versión 15 se ha implantado la posibilidad de hacer uso de las librerías de objetos del SPSS desde diversos lenguajes de programación. Aunque principalmente se ha implementado para Python, también existe la posibilidad de trabajar desde Visual Basic, C++ y otros lenguajes. El 28 de junio de 2009 se anuncia que IBM, meses después de ver frustrado su intento de compra de Sun Microsystems, el gigante informático estadounidense anuncia la adquisición de SPSS, por la no despreciable cifra de 1.200 millones de dólares USA.

[2] **EViews** (Dictamen econométrico) es un paquete estadístico para Windows, utilizado principalmente para las series temporales orientadas al análisis econométrico, aunque también puede resultar útil a los efectos de la aplicación topográfica que aquí propugnamos. Es desarrollado por *Quantitative Micro Software* (QMS). La versión 1.0 fue lanzada en marzo de 1994, y sustituye a la anterior MicroTSP. La versión actual de EViews es de 7.1, lanzada en abril de 2010. EViews puede ser utilizado para análisis estadístico general y el análisis econométrico, como la sección transversal y análisis de datos del panel y de series de tiempo (cronológicas) de estimación y previsión. EViews combina la hoja de cálculo y la tecnología de base de datos relacional con las tareas tradicionales que se encuentran en el software de estadística, y utiliza un Windows GUI. Esto se combina con un lenguaje de programación que muestra limitada la orientación a objetos. EViews se basa principalmente en un formato de archivos propietarios y no documentados para el almacenamiento de datos. Sin embargo, la entrada y salida soporta numerosos formatos, incluyendo formato de base de datos, formatos de Excel, PSPP / SPSS, DAP / SAS, Stata, RATS y TSP. EViews puede tener acceso ODBC a bases de datos. EViews formatos de archivo puede ser parcialmente abierta por gretl.

[3] En el año 1622, el matemático inglés Henry Briggs (1561-1630) publicó un pequeño tratado en el *Paso del Noroestea los mares del sur, a través del Continente de Virginia y la Bahía de Hudson*; y en 1624 su *Aritmética Logarítmica* en folio, un trabajo que contenía los logaritmos de treinta mil números naturales a catorce decimales (1-20.000 y 90.000 a 100.000). También, Briggs completó la tabla de funciones trigonométricas y tangentes para la centésima parte de cada grado a catorce decimales, con una tabla de funciones naturales a quince lugares y las tangentes y secantes para los mismos diez lugares; todos los cuales fueron impresos en Gouda en 1631 y publicados en 1633 bajo el título de *Trigonometria Britannica*; este trabajo fue probablemente el sucesor de su *Logarithmorum Chilias Prima* (*Introducción a los Logaritmos*), que dio una breve reseña de logaritmos y una larga tabla de los primeros 1.000 enteros calculados al catorce decimal. Briggs descubrió, de una forma un tanto oculta y sin la prueba correspondiente, el teorema del binomio.

Esta forma funcional coincide con otra que veremos más adelante: la estimación exponencial. Aquí, empleando logaritmos neperianos el coeficiente de la variable X es “ln B” mientras que en la forma funcional es simplemente “B”.

Del apartado correspondiente se observa como el coeficiente de la variable X tiene de valor: 0,001199 con lo que ahora sería:

$$\text{Ln } B = 0{,}001199 \Rightarrow B = e^{0{,}001199} = 1{,}0012$$

Todo lo demás no varía.

El comando para activarla en la hoja de cálculo citada es el siguiente:

**ESTIMACION.LOGARITMICA**

A continuación, se exponen brevemente las instrucciones precisas:

a) Escoger en fx la función: ESTIMACION.LOGARITMICA, tal como hemos señalado anteriormente.

b) En la Caja de diálogo se debe marcar la Columna de la Variable Dependiente (y) con el ratón del ordenador.

c) En la Caja de diálogo marcar las Columnas de las Variables Independientes (x) con el ratón.

d) Indicar en la ventanilla "CONSTANTE" el argumento: VERDADERO.

e) Indicar en la ventanilla "ESTADISTICA" el argumento: VERDADERO.

f) Marcar con el Ratón el Rango de Salida (*) de los elementos de la Regresión.

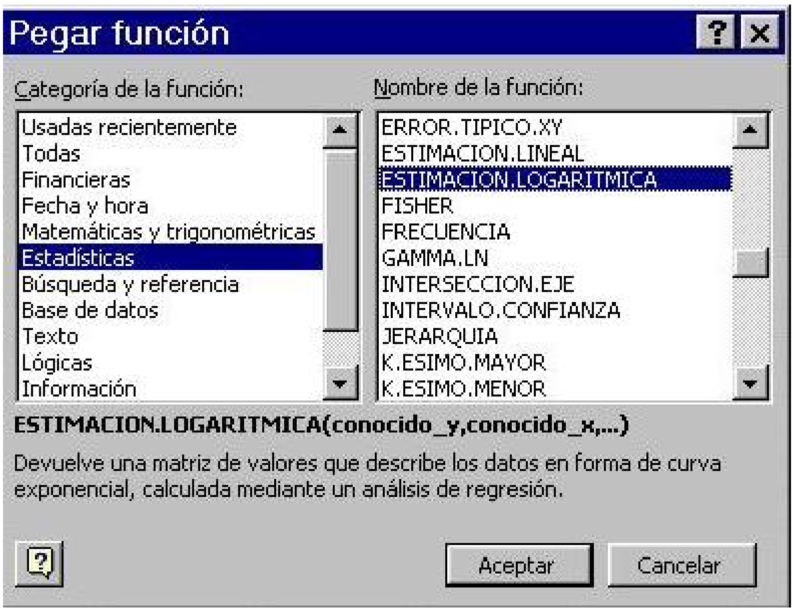
g) Iluminar con el ratón en la "Barra de Fórmulas" la caja donde aparece la fórmula de la regresión.

h) Apretar simultáneamente las teclas: "CONTROL", "SHIFT" (tecla con la flecha hacia arriba) y "ENTER".

(*) El Rango de Salida tiene un tamaño de: 5 líneas X el # de Variables de columnas.

Vamos, pues, a seguir los siguientes pasos tal como los hemos relacionado:

a) Escoger en fx la función: ESTIMACIÓN.LOGARÍTMICA.

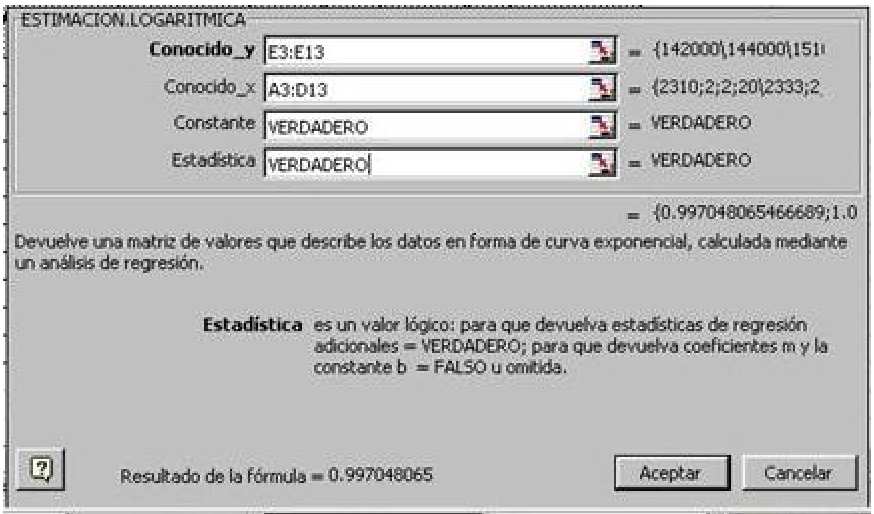



b) En la Caja de diálogo marcar la Columna de la Variable Dependiente (y) con el ratón.

c) En la Caja de diálogo marcar las Columnas de las Variables Independientes (x) con el ratón.

d) Indicar en la ventanilla "CONSTANTE" el argumento: VERDADERO.

e) Indicar en la ventanilla "ESTADISTICA" el argumento: VERDADERO.




f) Marcar con el Ratón el Rango de Salida de los elementos de la Regresión.

g) Iluminar con el ratón la "Barra de Fórmulas", ventanilla donde aparece la fórmula de la regresión.

h) Apretar simultáneamente las teclas: "CONTROL", "SHIFT" y "ENTER".

Al final del proceso, se obtiene la siguiente pantalla (ejemplo cualquiera):


En la pantalla anterior, usada como simple ejemplo, el resultado de la regresión logarítmica múltiple efectuada, en este caso con 5 variables (en la problemática de la nivelación óptima de terrenos que propugnamos este número queda reducido a 3, como se sabe), será:

$$\textit{Modelo de Regresión:}\quad Y = A * B^{X1} * C^{X2} * D^{X3} * E^{X4}$$

$$Y = 104{,}481.9964 * 1.0001^{X1} * 1.0901^{X2} * 1.0252^{X3} * 0.997^{X4}$$

$$R\hat{\ }2 = 92.82\% \quad F = 19.3953 \quad Fo = 4.54$$

Si ahora, alternativamente, utilizamos el programa *EViews* para el ajuste o estimación logarítmica de la función correspondiente, obtendremos la expresión exponencial:

$$\mathbf{Z = A \cdot B^{X} \cdot C^{Y} = 22'9661 \cdot 1'0012^{X} \cdot 0'9996^{Y}}$$

A continuación, obtendremos la siguiente tabla como consecuencia de la aplicación de la ecuación de ajuste de la superficie anterior, que nos servirá para efectuar ulteriores consideraciones de interés:

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Vértices** | **Z=Yi** | **Y** | **Cot. Rel. I** | **Cot. Rel. D** | **di** | **di2** | **li2/Rel. Def.** | |
| 2 | 1 | 23,04 | 26,679 | 8,047 | 11,686 | 3,639 | 13,246 | 1,133 | |
| 3 | 2 | 25,02 | 25,891 | 10,027 | 10,898 | 0,871 | 0,759 | 0,070 | |
| 4 | 3 | 26,22 | 25,127 | 11,227 | 10,134 | -1,093 | 1,195 | 0,118 | |
| 5 | 4 | 22,80 | 24,384 | 7,807 | 9,391 | 1,584 | 2,511 | 0,267 | |
| 6 | 5 | 25,27 | 23,664 | 10,277 | 8,671 | -1,606 | 2,578 | 0,297 | |
| 7 | 6 | 25,51 | 22,965 | 10,517 | 7,972 | -2,545 | 6,476 | 0,812 | |
| 8 | 7 | 22,91 | 22,287 | 7,917 | 7,294 | -0,623 | 0,388 | 0,053 | |
| 9 | 8 | 24,61 | 26,948 | 9,617 | 11,955 | 2,338 | 5,465 | 0,457 | |
| 10 | 9 | 26,90 | 26,152 | 11,907 | 11,159 | -0,748 | 0,560 | 0,050 | |
| 11 | 10 | 26,55 | 25,379 | 11,557 | 10,386 | -1,171 | 1,371 | 0,132 | |
| 12 | 11 | 21,61 | 24,630 | 6,617 | 9,637 | 3,020 | 9,118 | 0,946 | |
| 13 | 12 | 23,94 | 23,902 | 8,947 | 8,909 | -0,038 | 0,001 | 0,000 | |
| 14 | 13 | 23,20 | 23,196 | 8,207 | 8,203 | -0,004 | 0,000 | 0,000 | |
| 15 | 14 | 22,04 | 22,511 | 7,047 | 7,518 | 0,471 | 0,222 | 0,030 | |
| 16 | 15 | 30,22 | 27,219 | 15,227 | 12,226 | -3,001 | 9,009 | 0,737 | |
| 17 | 16 | 29,12 | 26,415 | 14,127 | 11,422 | -2,705 | 7,319 | 0,641 | |
| 18 | 17 | 26,80 | 25,634 | 11,807 | 10,641 | -1,166 | 1,359 | 0,128 | |
| 19 | 18 | 22,22 | 24,877 | 7,227 | 9,884 | 2,657 | 7,061 | 0,714 | |
| 20 | 19 | 24,81 | 24,142 | 9,817 | 9,149 | -0,668 | 0,446 | 0,049 | |
| 21 | 20 | 24,02 | 23,429 | 9,027 | 8,436 | -0,591 | 0,349 | 0,041 | |
| 22 | 21 | 22,80 | 22,737 | 7,807 | 7,744 | -0,063 | 0,004 | 0,001 | |
| 23 | 22 | 31,63 | 27,492 | 16,637 | 12,499 | -4,138 | 17,122 | 1,370 | |
| 24 | 23 | 28,60 | 26,680 | 13,607 | 11,687 | -1,920 | 3,686 | 0,315 | |
| 25 | 24 | 24,93 | 25,892 | 9,937 | 10,899 | 0,962 | 0,926 | 0,085 | |
| 26 | 25 | 23,50 | 25,127 | 8,507 | 10,134 | 1,627 | 2,648 | 0,261 | |
| 27 | 26 | 25,70 | 24,385 | 10,707 | 9,392 | -1,315 | 1,729 | 0,184 | |
| 28 | 27 | 24,66 | 23,665 | 9,667 | 8,672 | -0,995 | 0,990 | 0,114 | |
| 29 | 28 | 22,59 | 22,966 | 7,597 | 7,973 | 0,376 | 0,141 | 0,018 | |
| 30 | 29 | 29,10 | 27,768 | 14,107 | 12,775 | -1,332 | 1,773 | 0,139 | |
| 31 | 30 | 25,11 | 26,948 | 10,117 | 11,955 | 1,838 | 3,379 | 0,283 | |
| 32 | 31 | 23,50 | 26,152 | 8,507 | 11,159 | 2,652 | 7,035 | 0,630 | |
| 33 | 32 | 25,13 | 25,380 | 10,137 | 10,387 | 0,250 | 0,062 | 0,006 | |
| 34 | 33 | 24,66 | 24,630 | 9,667 | 9,637 | -0,030 | 0,001 | 0,000 | |
| 35 | 34 | 23,81 | 23,903 | 8,817 | 8,910 | 0,093 | 0,009 | 0,001 | |
| 36 | 35 | 22,22 | 23,197 | 7,227 | 8,204 | 0,977 | 0,954 | 0,116 | |
| 37 | | 874,750 | 872,355 | 350,0 | 347,6 | -2,395 | 109,891 | **10,199** | **chi-cuadrado** |

Obsérvese que en la tabla anterior hemos definido el $d_i = Y_i - T_i$ como la diferencia existente entre las cotas del terreno natural o iniciales y las definitivas que se deducen de la aplicación de nuestro modelo de explanación. Ello es así con el objetivo de adecuarnos a la terminología utilizada para el cálculo de chi-cuadrado que realizaremos a continuación. En este caso, el sumatorio de las discrepancias $\sum d_i$ es sólo aproximadamente igual a 0 (-2,395).

El error estándar o típico de la estima de esta regresión múltiple (triple) vendrá dado por la expresión (véase el capítulo 5), con m = 2 variables explicativas correspondientes a la abscisa y la ordenada de cada punto:

$$S_{xy} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(Y_i - T_i)^2}{N - m - 1}} = \sqrt{\frac{109{,}891}{35 - 2 - 1}} = 1'85\ \text{m.}$$

Para N – 1 = 35 – 1 = 34 grados de libertad, se tiene un $\chi^2_{0,5}$ = 16’55, realizando la interpolación correspondiente en la tabla de percentiles de la distribución teórica de probabilidad chi-cuadrado que figura en el anexo 3. Al ser: $\chi^2$ = 10’199 < 16’55 puede considerarse bastante bajo, en términos relativos, el volumen de explanación a realizar en la parcela que nos ocupa. De haberse considerado, alternativamente, un valor del número de grados de libertad de:

$$N - m - 1 = 32 \text{ g.l.}$$

se obtendría, por interpolación lineal, un valor teórico chi-cuadrado algo más exigente $\chi^2_{0,5}$ = 15’17, lo que no modificaría tampoco las conclusiones anteriormente expresadas.

Por otra parte, el “grado de explanación” determinado, como ya se ha visto, por el “coeficiente de contingencia” C derivado de la distribución de probabilidad chi-cuadrado ($\chi^2$), vendrá dado por la expresión:

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + N}} = \sqrt{\frac{10'199}{10'199 + 35}} = 0'47 \cong 47\%,$$

siendo N = 35 el número de estacas o vértices de nivelación considerado.

Obsérvese, en fin, que la estimación ahora efectuada ofrece valores algo mejores que los obtenidos incluso mediante la regresión lineal (ajuste a un plano de nivelación). La comparación de los valores resultantes de los estadísticos de esta estimación con los de las restantes efectuadas podrá verse más adelante (al final del presente capítulo de nuestro libro) en el cuadro elaborado al efecto.

En algún momento puede planteársele al topógrafo el siguiente dilema: ¿qué modelo utilizar, el lineal o el logarítmico (exponencial) anteriormente obtenidos, para el replanteo del plano definitivo del terreno? Pues bien, desde un punto de vista estrictamente teórico o estadístico, el modelo que mejor explica el ajuste por regresión mínimo cuadrática y, en su consecuencia, el que provoca un menor movimiento de tierras en la parcela, será aquel cuyo coeficiente de concausalidad, determinación o crítico $R^2$ sea mayor.

De cualquier modo, en los problemas reales que puedan presentarse en la práctica de la nivelación no lineal, ya existe una predeterminación *ex anto* por parte del proyectista en el sentido de que el resultado final no constituya un plano perfecto por perentoriedad de la concepción de la propia obra, por lo que la solución a la pregunta planteada resulta obvia. Sin embargo, sí puede resultar interesante averiguar cuál de las posibles soluciones no lineales planteadas será más conveniente desde el punto de vista estrictamente económico (esto es, la que suponga un menor movimiento de tierras).

Evidentemente, además del error standard o típico de la estima, del $\chi^2$ y del coeficiente de contingencia o "grado de explanación del terreno" C, también el coeficiente de concausalidad $R^2$ puede usarse provechosamente en la comparación de la bondad del ajuste entre diferentes funciones y planos de nivelación.

En este sentido, en el capítulo anterior de nuestro libro hemos explicado de qué modo puede calcularse el expresado parámetro de concausalidad en el caso de las regresiones múltiples (triples) lineales. Así mismo, el estadístico[4] de contraste experimental "F" de Snedecor es el estadígrafo que se construye para contrastar si los parámetros asociados a las variables explicativas del modelo, o sea, las coordenadas X e Y (exceptuando el término independiente) son conjuntamente iguales a cero. O dicho de otro modo, este estadístico permite contrastar la capacidad explicativa conjunta de las variables introducidas en el modelo empleado[5].

Cabe señalar que, además del modelo exponencial reseñado, pueden emplearse otros modelos no lineales de regresión múltiple (semilogarítmicos, potenciales, transformación inversa, parabólicos o polinomiales, etc.) intentando buscar, en todo momento, el que ofrezca los resultados más ajustados, en que los valores resultantes de los estadígrafos relacionados sean mayores.

## 2.2. Estimación doblemente logarítmica

Utilizando, a partir de ahora, el expresado programa *EViews*, se trata de adoptar la forma funcional: $\ln Z = a + b \cdot \ln X + c \cdot \ln Y \Rightarrow$

$$Z = e^a \cdot X^b \cdot Y^c \text{ (potencial, logarítmica doble),}$$

cuyos resultados quedan expresados con especificidad en la tabla de la página siguiente:

[4] Un **estadístico** es una medida cuantitativa, derivada de un conjunto de datos de una muestra con el objetivo de estimar o contrastar características de una población o modelo estadístico. Más formalmente un estadístico es una función medible que, dada una muestra estadística de valores, les asigna un número que sirve para estimar los parámetros de la distribución de la que procede la muestra. Así por ejemplo la media muestral de valores sirve para estimar el valor esperado de una variable, la varianza muestral de una muestra amplia sirve para estimar la varianza de la población o universo, etc.

[5] Generalmente, se considera que un valor superior a 6 resulta suficiente para que la capacidad explicativa del modelo pueda calificarse como adecuada.

| Dependent Variable: LZ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Method: Least Squares | | | | |
| Included observations: 35 | | | | |
| **Variable** | **Coefficient** | **Standard Error** | **t-Statistic** | **Probability** |
| a | 2.971694 | 0.093470 | 31.79315 | 0.0000 |
| LX (b) | 0.067104 | 0.015653 | 4.286843 | 0.0002 |
| LY (c) | -0.010321 | 0.016671 | -0.619070 | 0.5403 |
| R-squared | 0.369586 | Mean dependent variable | | 3.214223 |
| Adjusted R-squared | 0.330185 | S.D. dependent variable | | 0.093716 |
| S.E. of regression | 0.076699 | Akaike info criterion | | -2.216031 |
| Sum squared resid | 0.188249 | Schwarz criterion | | -2.082716 |
| Log likelihood | 41.78055 | F-statistic | | 9.380136 |
| Durbin-Watson statistic | 1.513296 | Prob (F-statistic) | | 0.000622 |

**Ecuación resultante: $Z = e^{2'971694} \cdot X^{0'067104} \cdot Y^{-0'010321}$**

A continuación, obtendremos la siguiente tabla como consecuencia de la aplicación de la ecuación de ajuste de la superficie anterior:

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Vértices** | **Z=Yi** | **Y** | **Cot. Rel. I** | **Cot. Rel. D** | **di** | **di2** | **li2/Rel. Def.** | |
| 2 | 1 | 23,04 | 26,168 | 8,047 | 11,175 | 3,128 | 9,784 | 0,876 | |
| 3 | 2 | 25,02 | 25,877 | 10,027 | 10,884 | 0,857 | 0,734 | 0,067 | |
| 4 | 3 | 26,22 | 25,531 | 11,227 | 10,538 | -0,689 | 0,475 | 0,045 | |
| 5 | 4 | 22,80 | 25,104 | 7,807 | 10,111 | 2,304 | 5,308 | 0,525 | |
| 6 | 5 | 25,27 | 24,543 | 10,277 | 9,550 | -0,727 | 0,529 | 0,055 | |
| 7 | 6 | 25,51 | 23,716 | 10,517 | 8,723 | -1,794 | 3,218 | 0,369 | |
| 8 | 7 | 22,91 | 22,031 | 7,917 | 7,038 | -0,879 | 0,773 | 0,110 | |
| 9 | 8 | 24,61 | 26,236 | 9,617 | 11,243 | 1,626 | 2,644 | 0,235 | |
| 10 | 9 | 26,90 | 25,944 | 11,907 | 10,951 | -0,956 | 0,914 | 0,083 | |
| 11 | 10 | 26,55 | 25,597 | 11,557 | 10,604 | -0,953 | 0,908 | 0,086 | |
| 12 | 11 | 21,61 | 25,169 | 6,617 | 10,176 | 3,559 | 12,666 | 1,245 | |
| 13 | 12 | 23,94 | 24,607 | 8,947 | 9,614 | 0,667 | 0,445 | 0,046 | |
| 14 | 13 | 23,20 | 23,778 | 8,207 | 8,785 | 0,578 | 0,334 | 0,038 | |
| 15 | 14 | 22,04 | 22,088 | 7,047 | 7,095 | 0,048 | 0,002 | 0,000 | |
| 16 | 15 | 30,22 | 26,328 | 15,227 | 11,335 | -3,892 | 15,148 | 1,336 | |
| 17 | 16 | 29,12 | 26,034 | 14,127 | 11,041 | -3,086 | 9,523 | 0,863 | |
| 18 | 17 | 26,80 | 25,686 | 11,807 | 10,693 | -1,114 | 1,241 | 0,116 | |
| 19 | 18 | 22,22 | 25,256 | 7,227 | 10,263 | 3,036 | 9,217 | 0,898 | |
| 20 | 19 | 24,81 | 24,693 | 9,817 | 9,700 | -0,117 | 0,014 | 0,001 | |
| 21 | 20 | 24,02 | 23,86 | 9,027 | 8,867 | -0,160 | 0,026 | 0,003 | |
| 22 | 21 | 22,80 | 22,165 | 7,807 | 7,172 | -0,635 | 0,403 | 0,056 | |
| 23 | 22 | 31,63 | 26,467 | 16,637 | 11,474 | -5,163 | 26,657 | 2,323 | |
| 24 | 23 | 28,60 | 26,172 | 13,607 | 11,179 | -2,428 | 5,895 | 0,527 | |
| 25 | 24 | 24,93 | 25,822 | 9,937 | 10,829 | 0,892 | 0,796 | 0,073 | |
| 26 | 25 | 23,50 | 25,39 | 8,507 | 10,397 | 1,890 | 3,572 | 0,344 | |
| 27 | 26 | 25,70 | 24,823 | 10,707 | 9,830 | -0,877 | 0,769 | 0,078 | |
| 28 | 27 | 24,66 | 23,987 | 9,667 | 8,994 | -0,673 | 0,453 | 0,050 | |
| 29 | 28 | 22,59 | 22,282 | 7,597 | 7,289 | -0,308 | 0,095 | 0,013 | |
| 30 | 29 | 29,10 | 26,769 | 14,107 | 11,776 | -2,331 | 5,434 | 0,461 | |
| 31 | 30 | 25,11 | 26,47 | 10,117 | 11,477 | 1,360 | 1,850 | 0,161 | |
| 32 | 31 | 23,50 | 26,116 | 8,507 | 11,123 | 2,616 | 6,843 | 0,615 | |
| 33 | 32 | 25,13 | 25,679 | 10,137 | 10,686 | 0,549 | 0,301 | 0,028 | |
| 34 | 33 | 24,66 | 25,106 | 9,667 | 10,113 | 0,446 | 0,199 | 0,020 | |
| 35 | 34 | 23,81 | 24,26 | 8,817 | 9,267 | 0,450 | 0,203 | 0,022 | |
| 36 | 35 | 22,22 | 22,536 | 7,227 | 7,543 | 0,316 | 0,100 | 0,013 | |
| 37 | | | | 350,0 | 347,5 | -2,460 | 127,473 | **11,784** | **chi-cuadrado** |

Obsérvese que en la tabla anterior hemos definido el $d_i = Y_i - T_i$ como la diferencia entre las cotas del terreno natural o iniciales y las definitivas que se deducen de la aplicación de nuestro modelo de explanación. Ello es así con el objetivo de adecuarnos a la terminología utilizada para el cálculo de chi-cuadrado que realizaremos a continuación. En este caso, el $\sum d_i$ es sólo aproximadamente igual a 0 (-2,46).

El error estándar o típico de la estima de esta regresión múltiple (triple) vendrá dado por la expresión (véase el capítulo 5), con m = 2 variables explicativas correspondientes a la abscisa y la ordenada de cada punto:

$$S_{xy} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(Y_i - T_i)^2}{N - m - 1}} = \sqrt{\frac{127{,}473}{35 - 2 - 1}} = 2'00\ \text{m.}$$

Para N – 1 = 35 – 1 = 34 grados de libertad, se tiene un $\chi^2_{0,5}$ = 16’55, realizando la interpolación correspondiente en la tabla de percentiles de la distribución teórica de probabilidad chi-cuadrado que figura en el anexo 3. Al ser: $\chi^2$ = 11’784 < 16’55 puede considerarse bastante bajo, en términos relativos, el volumen de explanación a realizar en la parcela que nos ocupa. De haberse considerado, alternativamente, un valor del número de grados de libertad de:

$$N - m - 1 = 32 \text{ g.l.}$$

se obtendría, por interpolación lineal, un valor teórico chi-cuadrado algo más exigente $\chi^2_{0,5}$ = 15’17, lo que no modificaría tampoco las conclusiones anteriormente expresadas.

Por otra parte, el “grado de explanación” determinado, como ya se ha visto, por el “coeficiente de contingencia” C derivado de la distribución de probabilidad chi-cuadrado ($\chi^2$), vendrá dado por la expresión:

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + N}} = \sqrt{\frac{11'784}{11'784 + 35}} = 0'50 \cong 50\%,$$

siendo N = 35 el número de estacas o vértices de nivelación considerado.

Obsérvese, en fin, que la estimación ahora efectuada ofrece valores algo peores que los obtenidos mediante la regresión lineal (ajuste a un plano de nivelación) y la logarítmica. La comparación de los valores resultantes de los estadísticos de esta estimación con los de las restantes efectuadas podrá verse más adelante en el cuadro elaborado al efecto.

Si ahora, como hemos señalado, prescindiéramos de la variable o coordenada Y (no significativa desde el punto de vista estadístico) se obtendría la siguiente forma funcional: $Z = e^a \cdot X^b$ (es decir sin la variable Y), o bien la ecuación linealizada: $\ln Z = a + b \cdot \ln X$. Así:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Dependent Variable: LZ | | | | |
| Method: Least Squares | | | | |
| Included observations: 35 | | | | |
| **Variable** | **Coefficient** | **Standard Error** | **t-Statistic** | **Probability** |
| a | 2.931486 | 0.066586 | 44.02570 | 0.0000 |
| LX (b) | 0.067104 | 0.015506 | 4.327473 | 0.0001 |
| R-squared | 0.362036 | Mean dependent variable | | 3.214223 |
| Adjusted R-squared | 0.342703 | S.D. dependent variable | | 0.093716 |
| S.E. of regression | 0.075979 | Akaike info criterion | | -2.261269 |
| Sum squared resid | 0.190504 | Schwarz criterion | | -2.172392 |
| Log likelihood | 41.57221 | F-statistic | | 18.72702 |
| Durbin-Watson statistic | 1.515209 | Prob (F-statistic) | | 0.000132 |

**Ecuación resultante: $Z = e^{2'931486} \cdot X^{0'067104}$**

## 2.3. Estimación exponencial

Se trata, ahora, de adoptar la forma funcional: $\ln Z = a + b \cdot X + c \cdot Y \Rightarrow$ $Z = e^{(a+bX+cY)}$ (exponencial)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Dependent Variable: LZ | | | | |
| Method: Least Squares | | | | |
| Included observations: 35 | | | | |
| **Variable** | **Coefficient** | **Standard Error** | **t-Statistic** | **Probability** |
| a | 3.134019 | 0.032640 | 96.01658 | 0.0000 |
| X (b) | 0.001199 | 0.000243 | 4.923538 | 0.0000 |
| Y (c) | -0.000395 | 0.000344 | -1.147524 | 0.2597 |
| R-squared | 0.444039 | Mean dependent variable | | 3.214223 |
| Adjusted R-squared | 0.409292 | S.D. dependent variable | | 0.093716 |
| S.E. of regression | 0.072028 | Akaike info criterion | | -2.341711 |
| Sum squared resid | 0.166016 | Schwarz criterion | | -2.208396 |
| Log likelihood | 43.97994 | F-statistic | | 12.77902 |
| Durbin-Watson statistic | 1.693096 | Prob (F-statistic) | | 0.000083 |

**Ecuación resultante: $Z = e^{3'134019 + 0'001199 \cdot X - 0'000395 \cdot Y}$**

A continuación, obtendremos la siguiente tabla como consecuencia de la aplicación de la ecuación de ajuste de la superficie anterior:

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Vértices** | **Z=Yi** | **Y** | **Cot. Rel. Ini** | **Cot. Rel. De** | **di** | **di2** | **di2/Rel. Def.** | |
| 2 | 1 | 23,04 | 23,116 | 8,05 | 8,123 | 0,076 | 0,006 | 0,001 | |
| 3 | 2 | 25,02 | 23,087 | 10,03 | 8,094 | -1,933 | 3,738 | 0,462 | |
| 4 | 3 | 26,22 | 23,057 | 11,23 | 8,064 | -3,163 | 10,007 | 1,241 | |
| 5 | 4 | 22,80 | 23,027 | 7,81 | 8,034 | 0,227 | 0,051 | 0,006 | |
| 6 | 5 | 25,27 | 22,997 | 10,28 | 8,004 | -2,273 | 5,168 | 0,646 | |
| 7 | 6 | 25,51 | 22,967 | 10,52 | 7,974 | -2,543 | 6,469 | 0,811 | |
| 8 | 7 | 22,91 | 22,937 | 7,92 | 7,944 | 0,027 | 0,001 | 0,000 | |
| 9 | 8 | 24,61 | 23,126 | 9,62 | 8,133 | -1,484 | 2,201 | 0,271 | |
| 10 | 9 | 26,90 | 23,096 | 11,91 | 8,103 | -3,804 | 14,467 | 1,785 | |
| 11 | 10 | 26,55 | 23,066 | 11,56 | 8,073 | -3,484 | 12,135 | 1,503 | |
| 12 | 11 | 21,61 | 23,036 | 6,62 | 8,043 | 1,426 | 2,035 | 0,253 | |
| 13 | 12 | 23,94 | 23,006 | 8,95 | 8,013 | -0,934 | 0,871 | 0,109 | |
| 14 | 13 | 23,20 | 22,976 | 8,21 | 7,983 | -0,224 | 0,050 | 0,006 | |
| 15 | 14 | 22,04 | 22,947 | 7,05 | 7,954 | 0,907 | 0,822 | 0,103 | |
| 16 | 15 | 30,22 | 23,136 | 15,23 | 8,143 | -7,084 | 50,180 | 6,162 | |
| 17 | 16 | 29,12 | 23,106 | 14,13 | 8,113 | -6,014 | 36,165 | 4,458 | |
| 18 | 17 | 26,80 | 23,076 | 11,81 | 8,083 | -3,724 | 13,866 | 1,715 | |
| 19 | 18 | 22,22 | 23,046 | 7,23 | 8,053 | 0,826 | 0,683 | 0,085 | |
| 20 | 19 | 24,81 | 23,016 | 9,82 | 8,023 | -1,794 | 3,217 | 0,401 | |
| 21 | 20 | 24,02 | 22,986 | 9,03 | 7,993 | -1,034 | 1,068 | 0,134 | |
| 22 | 21 | 22,80 | 22,956 | 7,81 | 7,963 | 0,156 | 0,024 | 0,003 | |
| 23 | 22 | 31,63 | 23,146 | 16,64 | 8,153 | -8,484 | 71,976 | 8,828 | |
| 24 | 23 | 28,60 | 23,116 | 13,61 | 8,123 | -5,484 | 30,073 | 3,702 | |
| 25 | 24 | 24,93 | 23,086 | 9,94 | 8,093 | -1,844 | 3,400 | 0,420 | |
| 26 | 25 | 23,50 | 23,056 | 8,51 | 8,063 | -0,444 | 0,197 | 0,024 | |
| 27 | 26 | 25,70 | 23,026 | 10,71 | 8,033 | -2,674 | 7,149 | 0,890 | |
| 28 | 27 | 24,66 | 22,996 | 9,67 | 8,003 | -1,664 | 2,768 | 0,346 | |
| 29 | 28 | 22,59 | 22,966 | 7,60 | 7,973 | 0,376 | 0,142 | 0,018 | |
| 30 | 29 | 29,10 | 23,156 | 14,11 | 8,163 | -5,944 | 35,331 | 4,328 | |
| 31 | 30 | 25,11 | 23,126 | 10,12 | 8,133 | -1,984 | 3,936 | 0,484 | |
| 32 | 31 | 23,50 | 23,096 | 8,51 | 8,103 | -0,404 | 0,163 | 0,020 | |
| 33 | 32 | 25,13 | 23,066 | 10,14 | 8,073 | -2,064 | 4,260 | 0,528 | |
| 34 | 33 | 24,66 | 23,036 | 9,67 | 8,043 | -1,624 | 2,637 | 0,328 | |
| 35 | 34 | 23,81 | 23,006 | 8,82 | 8,013 | -0,804 | 0,646 | 0,081 | |
| 36 | 35 | 22,22 | 22,976 | 7,23 | 7,983 | 0,756 | 0,572 | 0,072 | |
| 37 | | | | 350,0 | 281,866 | -68,129 | 326,476 | **40,223** | **chi-cuadrado** |

Obsérvese que en la tabla anterior hemos definido el $d_i = Y_i - T_i$ como la diferencia entre las cotas del terreno natural o iniciales y las definitivas que se deducen de la aplicación de nuestro modelo de explanación. Ello es así con el objetivo de adecuarnos a la terminología utilizada para el cálculo de chi-cuadrado que realizaremos a continuación. El error estándar o típico de la estima de esta regresión múltiple (triple) vendrá dado por la expresión (véase el capítulo 5), con m = 2 variables explicativas correspondientes a la abscisa y la ordenada de cada punto:

$$S_{xy} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(Y_i - T_i)^2}{N - m - 1}} = \sqrt{\frac{326{,}476}{35 - 2 - 1}} = 3'19\,\text{m.}$$

Para N – 1 = 35 – 1 = 34 grados de libertad, se tiene un $\chi^2_{0,5}$ = 16’55, realizando la interpolación correspondiente en la tabla de percentiles de la distribución teórica de probabilidad chi-cuadrado que figura en el anexo 3. Al ser: $\chi^2$ = 40’223 > 16’55 puede considerarse bastante elevado, en términos relativos, el volumen de explanación a realizar en la parcela que nos ocupa. De haberse considerado, alternativamente, un valor del número de grados de libertad de:

$$N – m – 1 = 32 \text{ g.l.}$$

se obtendría, por interpolación lineal, un valor teórico chi-cuadrado algo más exigente $\chi^2_{0,5}$ = 15’17, lo que no modificaría tampoco las conclusiones anteriormente expresadas.

Por otra parte, el “grado de explanación” determinado, como ya se ha visto, por el “coeficiente de contingencia” C derivado de la distribución de probabilidad chi-cuadrado ($\chi^2$), vendrá dado por la expresión:

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + N}} = \sqrt{\frac{40'223}{40'223 + 35}} = 0'73 \cong 73\%,$$

siendo N = 35 el número de estacas o vértices de nivelación considerado.

Si ahora, como hemos señalado, prescindiéramos de la variable o coordenada Y (no significativa desde el punto de vista estadístico) se obtendría la siguiente forma funcional: $Z = e^{a+b\cdot X}$ (es decir sin la variable Y), o bien la ecuación linealizada: $\ln Z = a + b\cdot X$. Así:

Dependent Variable: LZ
Method: Least Squares
Included observations: 35

| Variable | Coefficient | Standard Error | t-Statistic | Probability |
|---|---|---|---|---|
| a | 3.109322 | 0.024657 | 126.1037 | 0.0000 |
| X (b) | 0.001199 | 0.000245 | 4.900073 | 0.0000 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.421161 | Mean dependent variable | 3.214223 |
| Adjusted R-squared | 0.403621 | S.D. dependent variable | 0.093716 |
| S.E. of regression | 0.072373 | Akaike info criterion | -2.358528 |
| Sum squared resid | 0.172848 | Schwarz criterion | -2.269651 |
| Log likelihood | 43.27424 | F-statistic | 24.01071 |
| Durbin-Watson statistic | 1.652322 | Prob (F-statistic) | 0.000025 |

**Ecuación resultante: $Z = e^{3'109322 + 0'001199\cdot X}$**

### 2.4. Estimación semilogarítmica

Se trata, por último, de adoptar la forma funcional: Z = lna + b·lnX + c·lnY $\Rightarrow e^Z = a \cdot X^b \cdot Y^c$ (semilogarítmica)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Dependent Variable: Z | | | | |
| Method: Least Squares | | | | |
| Included observations: 35 | | | | |
| **Variable** | **Coefficient** | **Standard Error** | **t-Statistic** | **Probability** |
| La | 18.80655 | 2.442876 | 7.698529 | 0.0000 |
| LX (b) | 1.713999 | 0.409109 | 4.189587 | 0.0002 |
| LY (c) | -0.265797 | 0.435705 | -0.610039 | 0.5461 |
| R-squared | 0.359036 | Mean dependent variable | | 24.99286 |
| Adjusted R-squared | 0.318976 | S.D. dependent variable | | 2.429076 |
| S.E. of regression | 2.004575 | Akaike info criterion | | 4.310558 |
| Sum squared resid | 128.5863 | Schwarz criterion | | 4.443874 |
| Log likelihood | -72.43477 | F-statistic | | 8.962394 |
| Durbin-Watson statistic | 1.445052 | Prob (F-statistic) | | 0.000812 |

**Ecuación resultante: $e^Z$ = 147.089.234'8 · $X^{1'713999}$ · $Y^{-0'265797}$**

A continuación, obtendremos la siguiente tabla como consecuencia de la aplicación de la ecuación de ajuste de la superficie[6] anterior, con el objetivo de disponer de algunos parámetros de interés a la hora de establecer comparaciones:

[6] Aunque aquí se trata de resolver otro tipo de problemas, veamos que el Método de los Elementos Finitos enlaza francamente bien con los conceptos que aquí se exponen y permite obtener una solución numérica aproximada sobre un cuerpo, estructura o dominio (medio continuo o superficie del terreno) sobre el que están definidas ciertas ecuaciones diferenciales en forma débil o integral que caracterizan el comportamiento físico del problema, dividiéndolo en un número elevado de subdominios no-intersectantes entre sí denominados «elementos finitos». El conjunto de elementos finitos forma una partición del dominio también denominada discretización. Dentro de cada elemento se distinguen una serie de puntos representativos llamados «nodos» (las estacas o vértices). Dos nodos son adyacentes si pertenecen al mismo elemento finito; además, un nodo sobre la frontera de un elemento finito, puede pertenecer a varios elementos. El conjunto de nodos considerando sus relaciones de adyacencia se llama «malla». Los cálculos se realizan sobre una malla de puntos (llamados nodos), que sirven a su vez de base para la discretización del dominio en elementos finitos. La generación de la malla se realiza usualmente con programas especiales llamados "generadores de mallas", en una etapa previa a los cálculos que se denomina pre-proceso. De acuerdo con estas relaciones de adyacencia o conectividad se relaciona el valor de un conjunto de variables incógnitas definidas en cada nodo y denominadas "grados de libertad". El conjunto de relaciones existentes entre el valor de una determinada variable entre los nodos se puede escribir en forma de sistema de ecuaciones lineales (o linealizadas). La matriz de dicho sistema de ecuaciones se llama *matriz de rigidez* del sistema. El número de ecuaciones de dicho sistema resulta proporcional al número de nodos.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Vértices** | **Z=Yi** | **Y** | **Cot. Rel. I** | **Cot. Rel. D** | **di** | **di2** | **li2/Rel. Def.** | |
| 2 | 1 | 23,04 | 26,277 | 8,05 | 11,28 | 3,237 | 10,478 | 0,929 | |
| 3 | 2 | 25,02 | 25,990 | 10,03 | 11,00 | 0,970 | 0,941 | 0,086 | |
| 4 | 3 | 26,22 | 25,646 | 11,23 | 10,65 | -0,574 | 0,329 | 0,031 | |
| 5 | 4 | 22,80 | 25,216 | 7,81 | 10,22 | 2,416 | 5,837 | 0,571 | |
| 6 | 5 | 25,27 | 24,639 | 10,28 | 9,65 | -0,631 | 0,398 | 0,041 | |
| 7 | 6 | 25,51 | 23,763 | 10,52 | 8,77 | -1,747 | 3,052 | 0,348 | |
| 8 | 7 | 22,91 | 21,880 | 7,92 | 6,89 | -1,030 | 1,061 | 0,154 | |
| 9 | 8 | 24,61 | 26,343 | 9,62 | 11,35 | 1,733 | 3,003 | 0,265 | |
| 10 | 9 | 26,90 | 26,057 | 11,91 | 11,06 | -0,843 | 0,711 | 0,064 | |
| 11 | 10 | 26,55 | 25,713 | 11,56 | 10,72 | -0,837 | 0,701 | 0,065 | |
| 12 | 11 | 21,61 | 25,282 | 6,62 | 10,29 | 3,672 | 13,484 | 1,310 | |
| 13 | 12 | 23,94 | 24,706 | 8,95 | 9,71 | 0,766 | 0,587 | 0,060 | |
| 14 | 13 | 23,20 | 23,830 | 8,21 | 8,84 | 0,630 | 0,397 | 0,045 | |
| 15 | 14 | 22,04 | 21,947 | 7,05 | 6,95 | -0,093 | 0,009 | 0,001 | |
| 16 | 15 | 30,22 | 26,433 | 15,23 | 11,44 | -3,787 | 14,341 | 1,254 | |
| 17 | 16 | 29,12 | 26,147 | 14,13 | 11,15 | -2,973 | 8,839 | 0,792 | |
| 18 | 17 | 26,80 | 25,803 | 11,81 | 10,81 | -0,997 | 0,994 | 0,092 | |
| 19 | 18 | 22,22 | 25,372 | 7,23 | 10,38 | 3,152 | 9,935 | 0,957 | |
| 20 | 19 | 24,81 | 24,795 | 9,82 | 9,80 | -0,015 | 0,000 | 0,000 | |
| 21 | 20 | 24,02 | 23,920 | 9,03 | 8,93 | -0,100 | 0,010 | 0,001 | |
| 22 | 21 | 22,80 | 22,037 | 7,81 | 7,04 | -0,763 | 0,582 | 0,083 | |
| 23 | 22 | 31,63 | 26,569 | 16,64 | 11,58 | -5,061 | 25,614 | 2,213 | |
| 24 | 23 | 28,60 | 26,282 | 13,61 | 11,29 | -2,318 | 5,373 | 0,476 | |
| 25 | 24 | 24,93 | 25,938 | 9,94 | 10,95 | 1,008 | 1,016 | 0,093 | |
| 26 | 25 | 23,50 | 25,508 | 8,51 | 10,52 | 2,008 | 4,032 | 0,383 | |
| 27 | 26 | 25,70 | 24,931 | 10,71 | 9,94 | -0,769 | 0,591 | 0,060 | |
| 28 | 27 | 24,66 | 24,055 | 9,67 | 9,06 | -0,605 | 0,366 | 0,040 | |
| 29 | 28 | 22,59 | 22,172 | 7,60 | 7,18 | -0,418 | 0,175 | 0,024 | |
| 30 | 29 | 29,10 | 26,861 | 14,11 | 11,87 | -2,239 | 5,013 | 0,422 | |
| 31 | 30 | 25,11 | 26,574 | 10,12 | 11,58 | 1,464 | 2,143 | 0,185 | |
| 32 | 31 | 23,50 | 26,230 | 8,51 | 11,24 | 2,730 | 7,453 | 0,663 | |
| 33 | 32 | 25,13 | 25,800 | 10,14 | 10,81 | 0,670 | 0,449 | 0,042 | |
| 34 | 33 | 24,66 | 25,223 | 9,67 | 10,23 | 0,563 | 0,317 | 0,031 | |
| 35 | 34 | 23,81 | 24,347 | 8,82 | 9,35 | 0,537 | 0,288 | 0,031 | |
| 36 | 35 | 22,22 | 22,464 | 7,23 | 7,47 | 0,244 | 0,060 | 0,008 | |
| 37 | | 874,750 | 874,750 | 350,0 | 350,0 | 0,000 | 128,579 | **11,821** | **chi-cuadrado** |

Obsérvese que en la tabla anterior hemos definido el $d_i = Y_i - T_i$ como la diferencia existente entre las cotas del terreno natural o iniciales y las definitivas que se deducen de la aplicación de nuestro modelo de explanación. Ello es así con el objetivo de adecuarnos a la terminología utilizada para el cálculo de chi-cuadrado que realizaremos a continuación.

El error estándar o típico de la estima de esta regresión múltiple (triple) vendrá dado por la expresión (véase el capítulo 5), con m = 2 variables explicativas correspondientes a la abscisa y la ordenada de cada punto:

$$S_{xy} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(Y_i - T_i)^2}{N - m - 1}} = \sqrt{\frac{128'579}{35 - 2 - 1}} = 2'00\,\text{m}.$$

Para N – 1 = 35 – 1 = 34 grados de libertad, se tiene un $\chi^2_{0,5}$ = 16’55, realizando la interpolación correspondiente en la tabla de percentiles de la distribución teórica de probabilidad chi-cuadrado que figura en el anexo 3. Al ser: $\chi^2$ = 11'821 < 16'55 puede considerarse aceptable, en términos relativos, el volumen de explanación a realizar en la parcela que nos ocupa. De haberse considerado, alternativamente, un valor del número de grados de libertad de:

$$N - m - 1 = 32 \text{ g.l.}$$

se obtendría, por interpolación lineal, un valor teórico chi-cuadrado algo más exigente $\chi^2_{0,5}$ = 15'17, lo que no modificaría tampoco las conclusiones anteriormente expresadas.

Por otra parte, el "grado de explanación" determinado, como ya se ha visto, por el "coeficiente de contingencia" C derivado de la distribución de probabilidad chi-cuadrado ($\chi^2$), vendrá dado por la expresión:

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + N}} = \sqrt{\frac{11'821}{11'821 + 35}} = 0'50 \cong 50\%,$$

siendo N = 35 el número de estacas o vértices de nivelación considerado.

Si ahora, como hemos señalado, prescindiéramos de la variable o coordenada Y (no significativa desde el punto de vista estadístico) se obtendría la siguiente forma funcional: $e^Z = a \cdot X^b$ (es decir sin la variable Y), o bien la forma linealizada: $Z = \ln a + b \cdot \ln X$. Así:

Dependent Variable: Z
Method: Least Squares
Included observations: 35

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Probability |
|---|---|---|---|---|
| La | 17.77101 | 1.739955 | 10.21349 | 0.0000 |
| LX (b) | 1.713999 | 0.405199 | 4.230020 | 0.0002 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.351582 | Mean dependent variable | 24.99286 |
| Adjusted R-squared | 0.331933 | S.D. dependent variable | 2.429076 |
| S.E. of regression | 1.985415 | Akaike info criterion | 4.264978 |
| Sum squared resid | 130.0817 | Schwarz criterion | 4.353855 |
| Log likelihood | -72.63711 | F-statistic | 17.89307 |
| Durbin-Watson statistic | 1.448726 | Prob (F-statistic) | 0.000174 |

**Ecuación resultante: $e^Z = 52.221.769 \cdot X^{1'713999}$**

## 2.5. Resumen de estimaciones

Una vez efectuados los ajustes minimocuadráticos a diferentes funciones matemáticas, lineales o no, para el ejemplo de nivelación desarrollado, podemos elaborar la siguiente tabla comparativa con los parámetros que juzgamos más significativos de las estimaciones realizadas de la cota taquimétrica Z con las dos variables explicativas (coordenadas X e Y):

Tabla 4. Cuadro comparativo de estimaciones.

| ESTIMACIÓN | $R^2$ | F | D-W | $S_{xy}$ | $\chi^2$ | C |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Lineal (*) | 0,445577 | 12,85885 | 1,612869 | 1,86 m. | 10,268 | 0,48 |
| Logarímica (*) | -- | -- | -- | 1,85 m. | 10,199 | 0,47 |
| Doblemente Logarítmica | 0,369586 | 9,380136 | 1,513296 | 2,00 m. | 11,784 | 0,50 |
| Exponencial | 0,444039 | 12,77902 | 1,693096 | 3,19 m. | 40,223 | 0,73 |
| Semilogarítmica | 0,359036 | 8,962394 | 1,445052 | 2,00 m. | 11,821 | 0,50 |

Desde luego, la estimación a considerar definitivamente por el proyectista de la obra de tierra será tanto más correcta cuanto mayores sean los tres primeros parámetros analizados y, por el contrario, cuanto menores sean los tres últimos, dando preferencia a estos últimos en la decisión final, puesto que pueden producirse resultados contradictorios. En este orden de ideas, puede observarse que la estimación lineal es bastante correcta y, en el caso de desearse el ajuste a una superficie curva (no lineal), debería adoptarse la regresión logarítmica, aunque también podría considerarse cualquiera de ellas menos la exponencial; en concreto, las estimaciones doblemente logarítmica y semilogarítmica ofrecen resultados altamente coincidentes, siendo algo mejor la primera de ellas. En el cuadro-resumen anterior, en definitiva, se han señalizado con (*) las regresiones que procede seleccionar a los efectos deseados.